Ciągi (nie)jednomonotoniczne i nie tylko

13.05.2009

1. Udowodnić, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

2. Pokazać, że dla dodatnich liczb a, b, c prawdziwa nierówność (nierówność Nesbitta):

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Wykaż, że nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c o sumie 1 spełniają nierówność:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \leqslant \frac{3}{4}.$$

4. Trójkąt równoramienny ABC ($AB = AC$) wpisany jest w okrąg ω_1. Okrąg ω_2 jest styczny wewnętrznie do ω_1 oraz do AB w punkcie P i do AC w punkcie Q. Pokazać, że środek odcinka PQ jest środkiem okręgu wpisanego w ABC.

5. Na spotkanie przybyły jednoosobowe delegacje 193 państw. Każdy miał usiąść na krześle podpisanym jego nazwiskiem przy okrągłym stole, na którym rozstawiono tabliczki z nazwami wszystkich 193 krajów (jedna tabliczka przy każdym krześle). Kiedy wszyscy zajęli miejsca okazało się, że nikt nie siedzi przy tabliczce z nazwą swojego państwa. Pokazać, że można tak obrócić stół, żeby co najmniej dwie osoby miały przy sobie odpowiednie wizytówki.

6. Normalne skoczki poruszają się po szachownicy dwa pola w jednym kierunku i jedno pole w drugim kierunku (lub odwrotnie). Alek struga superskoczki, które poruszają się po szachownicy trzy pola w jednym kierunku i dwa pola w drugim kierunku (lub odwrotnie). Tadeusz ustawił na nieskończonej szachownicy 2009 superskoczków. Przyszedł Waldek i stwierdził, że istnieje 666 superskoczków, które się nie biją. Czy Waldek zawsze musiał mieć rację?