Twierdzenie o dwusiecznej. *Niech AD będzie dwusieczną w trójkącie ABC. Wtedy $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.*

Twierdzenie Cevy. *Niech punkty A_1, B_1, C_1 leżą odpowiednio na bokach BC, AC, AB trójkąta ABC. Wtedy proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.*

Twierdzenie Menelaosa. *Niech punkty B_1, C_1 leżą odpowiednio na bokach AC, AB trójkąta ABC, a punkt A_1 na przedłużeniu boku AB. Wtedy punkty A_1, B_1, C_1 są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$.*

Twierdzenie sinusów. *W trójkącie ABC zachodzi $\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{CA} = \frac{\sin \angle C}{AB}$.*

Pole trójkąta. *Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$.*

Trygonometryczne twierdzenie Cevy. *Niech punkty A_1, B_1, C_1 leżą odpowiednio na bokach BC, AC, AB trójkąta ABC. Wtedy proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle BCC_1} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle ABB_1} = 1$.*

Ogólniejsze wersje twierdzeń Cevy i Menelaosa. *Niech punkty A_1, B_1, C_1 leżą odpowiednio na prostych BC, AC, AB. Niech $R = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$. Teraz:*

- *jeśli $R = 1$ oraz parzysta liczba spośród punktów A_1, B_1, C_1 należy do boków trójkąta ABC, to proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie (tw. Cevy);*
- *jeśli $R = 1$ oraz nieparzysta liczba spośród punktów A_1, B_1, C_1 należy do boków trójkąta ABC, to punkty A_1, B_1, C_1 są współliniowe (tw. Menelaosa).*

1. Udowodnij, że w trójkącie ostrokątnym w jednym punkcie przecinają się: środkowe; dwusieczne; wysokości.

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F. Proste DE i DF przecinają prostą przechodzącą przez A i równoległą do BC odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnij, że $AX = AY$.

4. AD jest dwusieczną w trójkącie ABC, a jej symetralna przecina prostą BC w punkcie F. Udowodnij, że $\frac{BE}{CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

5. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że proste przechodzące przez środki boków BC, CA, AB równoległe odpowiednio do AP, BP, CP, przecinają się w jednym punkcie.

6. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że proste łączące środki boków BC, CA, AB odpowiednio ze środkami AD, BE, CF, przecinają się w jednym punkcie.

7. Niech α, β, γ będą dowolnymi kątami takimi, że suma każdych dwóch z nich jest mniejsza niż π. Na zewnątrz trójkąta ABC skonstruowano trójkąty A_1BC, AB_1C, ABC_1 tak, że ich kąty przy wierzchołkach A, B, C mają odpowiednio miarę α, β, γ. Udowodnij, że proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie.

8. Udowodnij powyższe dla trójkątów skonstruowanych wewnątrz trójkąta ABC.

9. Okrąg o środku O wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Na półprostych OA_1, OB_1, OC_1 odłożono jednakowe odcinki OA_2, OB_2, OC_2. Udowodnij, że proste AA_2, BB_2, CC_2 przecinają się w jednym punkcie.

10. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF}$ (tw. Van Aubela).

11. Dane są trzy rozłączne zewnętrznie okręgi o_1, o_2, o_3 o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3. Dwie spośród stycznych do obu okręgów o_2 i o_3 przecinają się w punkcie A_1, leżącym na odcinku O_2O_3. Analogicznie definiujemy punkty A_2 i A_3. Udowodnij, że albo proste O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 przecinają się w jednym punkcie, albo punkty A_1, B_1, C_1 są współliniowe.

12. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R. Udowodnij, że $\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}$.

13. Ferdek, Paździoch, Walduś i Boczek poruszają się każdy po swojej prostej ze stałymi prędkościami. W każdej sytuacji, gdy dwóch z nich się spotyka, wypijają 2 napoje MF w króciutkim czasie i jadą dalej. Udowodnij, że niemożliwe jest, aby zostało skonsumowanych dokładnie 10 napojów MF.

14. Na zewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano takie trójkąty równoramienne ARB, BPC, CQA, że $AR = BR, BP = CP, AQ = CQ$. Pokazać, że proste AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie.

15. W trapezie $ABCD$, w którym $BC > AD$, na dłuższej podstawie AB obrano taki punkt K, by $KB = CD$. Następnie przeprowadzono przez punkt B taką prostą, by przecinała ona odcinki AD i KD w punktach odpowiednio E i F oraz by $AE = KF$. Na boku BC oznaczono taki punkt S, że $BS = AD$. Udowodnij, że $EC || FS$.

16. Z wierzchołka C kąta prostego trójkąta ABC poprowadzono wysokość CK, a w trójkącie CKA poprowadzono dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez punkt B równoległa do CE przecina prostą CK w punkcie F. Udowodnij, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.

17. Punkty A_1, A_2 należą do boku BC trójkąta ABC, punkty B_1, B_2 do boku AC, punkty C_1, C_2 do boku AB. Punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na okręgu. Udowodnij, że jeśli AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie, to AA_2, BB_2, CC_2 także przecinają się w jednym punkcie.

18. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do prostych BC, AC, AB. Odpowiednio punkty P_1, Q_1, R_1 są ich obrazami względem środków odpowiednich odcinków (BC, AC, AB). Udowodnij, że jeśli punkty P, Q, R są współliniowe, to P_1, Q_1, R_1 także są współliniowe. Udowodnij, że jeśli AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie, to AP_1, BQ_1, CR_1 także przecinają się w jednym punkcie.