KÓŁECZKO Z CEVY I MENELAOSA (17.10.2007)

1. TEORIA

1.0.Twierdzenie o dwusiecznej

Niech AD będzie dwusieczną w trójkącie ABC. Wtedy $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

1.1.Twierdzenie Cevy

Niech punkty X, Y, Z leżą odpowienio na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC. Wtedy proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$.

1.2.Twierdzenie Menelaosa

Niech punkty Z i Y leżą odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta ABC, a punkt X na przedłużeniu boku AB. Wtedy punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = 1$.

2. ZADANKA

2.1. Korzystając z twierdzenia Cevy udowodnić że w trójkącie ostrokątnym w jednym punkcie przecinają się: środkowe; dwusieczne; wysokości.

2.2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

2.3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają boki tego trójkąta odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Proste A_1B_1 i A_1C_1 przecinają prostą przechodzącą przez A i równoległą do BC odpowiednio w punktach C_2 i B_2. Wykazać, że $AB_2 = AC_2$.

2.4. AD jest dwusieczną w trójkącie ABC, a jej symetralna przecina prostą BC w punkcie E. Wykazać, że $\frac{BE}{CE} = (\frac{AB}{AC})^2$.

2.5. Z wierzchołka C kąta prostego trójkąta ABC poprowadzono wysokość CK i dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez B i równoległa do prostej CE przecina prostą CK w punkcie F. Wykazać, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.

2.6. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt P. Proste AP, BP, CP przecnają boki trójkąta odpowiednio w punktach K, L, M. Wykazać, że $\frac{AP}{PK} = \frac{AL}{LC} + \frac{AM}{MB}$.

2.7. Dane są trzy okręgi rozłączne zewnętrznie okręgi o_1, o_2, o_3 o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3. Dwie spośród stycznych do obu okręgów o_2 i o_3 przecinają się w punkcie A_1, leżącym na odcinku O_2O_3. Analogicznie definiujemy punkty A_2 i A_3. Udowodnić, że proste O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 przecinają się w jednym punkcie.