

KÓŁECZKO Z BAJECZEK I REKURENCJI (24.01.07)

1. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

3. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

4. Udowodnić, że dla każdego $n-1 \geq k \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

5. Udowodnić, że:

$$\sum_{a,b,c} \binom{n}{a+b} \binom{n}{b+c} \binom{n}{c+a} = 2^{3n-2}$$

6. Ile jest prostokątów w kratce $N \times N$?

7. Na ile sposobów można pokryć pasek $2 \times N$ kostkami domina 1×2 ?

8. Znaleźć wzory jawne rekurencji, jeśli $a_0 = 1$, $a_1 = 3$:

a) $a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}$

b) $a_{n+1} = 4a_n + 2a_{n-1} + 3^n + 5$

c) $a_{n+1} = 7a_n - 16a_{n-1} + 12a_{n-2}$ dla $a_2 = 5$

9. Żaba skacze po sąsiednich wierzchołkach ośmiokąta foremnego. Zaczyna w A , gdy dotrze do naprzeciwległego wierzchołka (czyli E) zatrzymuje się na obiad (i już więcej nie skacze jak głupia). Na ile różnych sposobów może dotrzeć do wierzchołka E w dokładnie n ruchach?