

## Ciągi i geometria

17.12.2009r.

1. Znajdź wszystkie  $a$  takie, że w ciągu  $f(n)$  ( $f(1) = 0, f(2) = a \in \mathbb{R}, f(n) = -2f(n-1) - f(n-2)$  dla  $n \geq 3$ ) występuje więcej niż jedno zero.
2. Pokaż, że w ciągu  $a_n$  ( $a_{n+1} = a_n^3 + 1999$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ) występuje co najwyżej jeden kwadrat.
3. Niech  $a$  i  $b$  będą dwoma względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieje nieskończony zbiór, zawierający parami względnie pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego  $a, a + b, a + 2b, \dots$
4. Niech  $A, B, C, D$  będą różnymi punktami na prostej (w tej kolejności). Okręgi o średnicach  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punktach  $X$  i  $Y$ . Niech  $O$  będzie dowolnym punktem na prostej  $XY$ , ale nie na  $AD$ .  $CO$  przecina okrąg ze średnicą  $AC$  ponownie w  $M$  oraz  $BO$  przecina drugi okrąg ponownie w  $N$ . Udowodnij, że proste  $AM, DN, XY$  są współpękowe.