Kółko 22 XI 2004 - kilka zadanek z teorii liczb

1. Oznaczmy przez $d(n)$ liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby $n \in \mathbb{N}$ (łącznie z 1 i z n). Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich n, dla których $\frac{d(n)}{n}$ jest liczbą naturalną.

2. Znaleźć nieskończony i niestały ciąg arytemtyczny liczb naturalnych taki, że żaden jego wyraz nie jest ani sumą dwóch kwadratów, ani sumą dwóch sześcianów.

3. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n.

4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie takim ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych, że $i \mid a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $n \nmid a_n$. Udowodnić, że n jest potęgą liczby pierwszej.

5. Czy istnieje nieskończony, różny od stałego ciąg arytmetyczny, ktżego każdy wyraz jest postaci a^b, gdzie a i b są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $b \geqslant 2$?

6. Dane są liczby naturalne k, n takie, że $0 < k \leqslant \frac{n^2}{4}$ oraz k nie ma dzielnika pierwszego większego niż n. Dowieść, że $n!$ dzieli się przez k.

7. Rozwiązać w liczbach naturalnych $x, y \geqslant 1$ równanie

$$2^x - 3^y = 7.$$

8. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ oznaczny przez $s(n)$ sumę wszystkich dodatnich dzielników n. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ iloczyn $s(n-1)s(n)s(n+1)$ jest liczbą parzystą.

9. Dana jest liczba naturalna $n > 1$ oraz liczba pierwsza p taka, że $p - 1$ dzieli się przez n, $n^3 - 1$ zaś dzieli się przez p. Dowieść, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.