Kółko 11 X 2004 - kilka zadanek z teorii liczb

1. Dane są liczby naturalne k, n większe od 1, przy czym liczba $p = 2k - 1$ jest pierwsza. Dowieść, że jeżeli liczba $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ jest podzielna przez p, to jest ona podzielna przez p^2.

2. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające warunki:

$$a_1 + 2^i a_2 + 3^i a_3 + \ldots + n^i a_n = 0$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Dowieść, że liczba $a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + n^k a_n$ jest podzielna przez $k!$.

3. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n + (50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

4. Dowieść, że liczba naturalna $n \geqslant 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geqslant 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich mających następującą własność: iloczyn dowolnych dwóch z nich daje resztę 1 przy dzieleniu przez trzecią liczbę.

6. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie:

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1.$$

7. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) naturalnych, dla których $\frac{x+1}{y}$ oraz $\frac{y+1}{x}$ są naturalne.

8. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są parami względnie pierwsze oraz spełniają równanie $a^2 + b^2 = c^2$. Liczby a i c są nieparzyste. Udowodnić, że $b + c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Dane są takie liczby całkowite a i b, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $2^n a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Dowieść, że $a = 0$.