Kółko 8 X 2004 - parę zadań

1. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ zachodzi następująca podzielność:

$$n! \mid 2^n(2n+1)(2n+3) \cdot \ldots \cdot (4n-1).$$

2. Wykaż, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geqslant 1$ zachodzi następująca podzielność:

$$(m)!(n)!(m+n)! \mid (2m)!(2n)!$$

3. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.