Kółko 10 III 2005 - zadania różne

1. Niech S będzie zbiorem n różnych punktów na płaszczyźnie. Najkrótsza odległość między dwoma punktami ze zbioru S wynosi d. Wykazać, że istnieje podzbiór T zbioru S zawierający przynajmniej $\frac{n}{7}$ punktów, taki, że najkrótsza odległość pomiędzy dwoma punktami ze zbioru T wynosi co najmniej $d\sqrt{3}$.

2. 120 jednostkowych kwadratów zostało rozmieszczonych w prostokącie 20×25, ich boki niekoniecznie są równoległe do boków prostokąta. Wykaż, że można wewnątrz tego prostokąta umieścić koło o średnicy 1 tak, by nie przecinało ono żadnego kwadratu.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $n^2 \nmid n!$.

4. Wykaż, że $2^{n+1} \mid \lceil(\sqrt{3}+1)^{2n}\rceil$.

5. W dzielnicy pracuje 100 policjantów. Każdego wieczora pewnych trzech wyrusza na patrol. Rozstrzygnij, czy da się tak sformowac patrole, by po pewnym czasie każdych dwóch policjantów spotkało się dokładnie raz na wieczornym patrolu.