**Kółko - 19 V 2004**

**1.** Znajdź wszystkie takie pary $x, y \in \mathbb{N}$, że liczby $x^2 + y$ oraz $y^2 + x$ są kwadratami liczb naturalnych.

**2.** W pewnym kraju jest 2004 miast i każde dwa mają bezpośrednie dwukierunkowe połączenie lotnicze. Rozstrzygnij czy można tak ustalić ceny biletów na te połączenia, aby koszt każdych dwóch podróży nie przebiegających w taki sam sposób, a polegających na przeleceniu cyklu Hamiltona, czyli jednokrotnym odwiedzeniu wszyskich miast i powrocie do wyróżnionego miasta, z którego podróż się rozpoczęła, był inny.

**3.** Niech $A$ oznacza liczbę ciągów liczb naturalnych (niekoniecznie różnych) $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ spełniających równianie:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{10}}.$$

Rozstrzygnij, czy liczba $A$ jest parzysta.

**4.** Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na tej szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niż $a$.

**5.** Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami rozwartokątnymi.

**6.** Rozważmy ciąg $a_n$ określony następująco:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 11, a_4 = 15, a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n.$$

Rozstrzygnij, czy w ciągu tym występują cztery kolejne wyrazy podzielne przez 7.

**7.** Znajdź ilość rozwiązań układu w $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2b - a = 2b^2 \\ 2a - b = 2a^2. \end{cases}$$