Kółko - 22 IV 2004

1. Wykaż, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność:

$$a^6 + a^2b^4 + 1 \geqslant a^3 + a^4b^2 + ab^2.$$

2. Sejm musi wybrać pomiędzy $n \in \mathbb{N}$ planami reform: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Każdy poseł szereguje je (w myślach) względem własnych upodobań, np. dla $n = 4$ może uszeregować $A_3 > A_2 > A_4 > A_1$. Dla każdego $i \in [1, n]$ przeprowadzone zostało głosowanie, która opcja jest lepsza, A_i, czy A_{i+1}, które zawsze zostawało rozstrzygnięte na korzyść A_i (numerujemy opcje cyklicznie, czyli $A_{n+1} = A_1$). Posłowie nie zmieniali zdania w poszczególnych głosowaniach i na wszystkich głosowaniach obecni byli ci sami posłowie. Wyznacz maksymalną stałą α taką, że opcja B wygrywa z opcją C wtedy i tylko wtedy, gdy na opcję B zagłosuje conajmniej α razy liczba posłów (jak widać byćmoże możliwe są remisy) i możliwa była zaistniała sytuacja.

3. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych, $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Wykaż, że istnieje nieskończony w obu kierunkach ciąg arytmetyczny, który nie przyjmuje wartości $P(k)$ dla żadnego $k \in \mathbb{Z}$.

4. Wykaż, że dla każdego wielomianu $P(x) = x^2 + px + q$ o współczynnikach całkowitych istnieje wielomian $Q(x) = 2x^2 + rx + s$ o współczynnikach całkowitych, taki, że zbiory wartości tych wielomianów w punktach całkowitych są rozłączne.

5. Pewna liczba liczb naturalnych napisana jest na tablicy. Jeśli $a \neq b$, to można zetrzeć z tablicy a i b, a zamiast nich napisać $NWD(a, b)$ i $NWW(a, b)$. Wykaż, że po pewnym czasie liczby przestaną się zmieniać.

6. Niech $S = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}, 2 \nmid n$. Niech $T \subsetneqq S$, taki, że dla każdych dwóch różnych elementów zbioru T ich suma jest różna od n i od $n + 1$. Rozstrzygnij jaką maksymalną moc może mieć zbiór T.