Kółko - 19 II 2004

1. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach całkowitych stopnia 2. Jeżeli dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ wielomian $Q(x)$ przyjmuje wartość całkowitą, to wielomian $P(x)$ dla tego x też przyjmuje wartość całkowitą. Udowodnij, że istnieją liczby $n, m \in \mathbb{Z}$ takie, że $P(x) = nQ(x)+m$.

2. Niech $F(n)$ będzie n-tą liczbą Fibonacciego. Wykaż, że dla $k = 60$ i dla każdego n zachodzi $10 \mid F_{n+k} - F_n$ i dla każdego $k < 60$ istnieje n takie, że nie zachodzi $10 \mid F_{n+k} - F_n$.

3. Rozstrzygnij, dla jakich $k \in \mathbb{Z}$ równanie $a^2+b^2 = c^2+k$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach calkowitych.

4. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że istnieją liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ spełniające układ równań:

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}$$

5. Niech A będzie zbiorem liczb wyrażalnych w postaci $a^2 + 2b^2$, gdzie $b \neq 0$. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli $p^2 \in A$, to $p \in A$.

6. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje nie stała funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość $f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)$?

7. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych dodatnich. Wykaż, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $P(xy)^2 \leqslant P(x^2)P(y^2)$.

8. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i $n \perp m$. Rozstrzygnij jakie wartości może przyjmować $NWD(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$.

9. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid < \frac{1}{q_n^2}$.

10. Niech $S(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza sumę cyfr w zapisze dziesiętnym liczby n. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi: $S(2n) \leqslant 2S(n) \leqslant 10S(2n)$.