Kółko 22 X 2004 - kilka zadanek z kombinatoryki

1. W pewnej grupie kn osób, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$ każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Wykazać, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.
Uwaga. Jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

2. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.

3. Dany jest zbiór n gdzie $n \geqslant 2$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

4. Dana jest liczba $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ oraz n-elementowy zbiór S. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ zbioru S o następującej własności: dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in S$, istnieje taka liczba $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, że zbiór $A_j \cap \{a, b\}$ jest jednoelementowy.

5. Noe ma umieścić na arce osiem gatunków zwierząt w czterech zagrodach, przy czym zamierza wykorzystać wszystkie zagrody. Okazało się, że dla każdego gatunku istnieją co najwyżej trzy inne gatunki, z którymi nie może on dzielić zagrody. Udowodnić, że można rozmieścić zwierzęta w zagrodach w taki sposób, by każdy gatunek był w zagrodzie z odpowiednimi dla siebie innymi gatunkami.

6. Jury olimpiady składa się na początku z 30 członków. Każdy członek jury uważa niektórych swoich kolegów za kompetentnych, a wszystkich pozostałych za niekompetentnych. Opinie w tej sprawie nie ulegają zmianie. Na początku zebrania odbywa się głosowanie lustracyjne. Po tym głosowaniu ci członkowie, których za niekompetentnych uznała więcej niż głosujących w ich sprawie, są usuwani z jury. Udowodnić, że po najwyżej 15 głosowaniach skład jury przestanie się zmieniać. Uwaga: nikt nie głosuje we własnej sprawie, natomiast głosuje w sprawie wszystkich pozostałych członków jury.

7. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy z przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny, takich, że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych graczy.

8. Na egzamin przygotowano 8 pytań. Każdy uczeń otrzymał 3 z nich. Żadnych dwóch uczniów nie otrzymało więcej niż jedno pytanie wspólne. Rozstrzygnąć jaka największa możliwa liczba uczniów mogła wziąć udział w egzaminie.