

Kółko 31 III 2005 - Gry i nie tylko

1. Gracze A i B grają w grę. Na tablicy napisana jest początkowo liczba 1. W danym ruchu gracz zmazuje liczbę n z tablicy i pisze nową liczbę k taką, że $2n \leq k \leq 3n$. Wygrywa gracz, który napisze na tablicy liczbę 1000 lub większą. Pierwszy rusza się gracz A . Rozstrzygnij który z graczy ma strategię wygrywającą.

2. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja różnowartościowa i 'na' $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f(n)$ oraz $f(n + 1)$ różnią się tylko jedną cyfrą w systemie dwójkowym.

3. Wykaż, że każda liczba całkowita daje się przedstawić w postaci sumy pięciu sześciątów liczb całkowitych (niekoniecznie różnych).

4. Gracze A i B mają nieskończoną ilość monet o nominałach 1zł, 2zł oraz 5zł. Gra polega na tym, że pierwszy na stół monetę kładzie gracz A , a potem kładą na zmianę. Wygrywa ten, po którym ruchu po raz pierwszy suma monet na stole wyniesie n złotych lub więcej. Rozstrzygnij dla jakich $n \in \mathbb{N}$ gracz A ma strategię wygrywającą.

5. Wykaż, że w grze w kółko i krzyżyk na pięć na skończonej kartce nie istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.