Różne

12.12.2008

1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite oraz $P(x) = 5$ dla 5 różnych liczb całkowitych. Pokazać, że nie istnieje takie y, że $-7 < P(y) < 5$ lub $5 < P(y) < 17$

2. Niech k będzie liczba naturalna większa od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$, gdzie k nie jest podzielne przez 5. Wykazać, że istnieja takie liczby całkowite a, b, że każdy wyraz ciagu (x_n) okreslonego wzorami: $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla $n \geqslant 1$ jest względnie pierwszy z liczba m.

3. Na płaszczy˘nie leży 2007 punktów, z których żadne trzy nie sa współliniowe. Udowodnij, że każdy punkt płaszczyzny jest pokryty przez parzysta liczbę trójkatów o wierzchołkach w tych punktach.

4. Znale˘ć wszystkie takie funkcje $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, że:
$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)} = \frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$
zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych w, x, y, z spełniajacych warunek $wx = yz$.

5. Okrag o srodku O wpisany w czworokat wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB,BC, CD,DA odpowiednio w punktach K, L, M, N przy czym proste KL i MN przecinaja się w punkcie S. Udowodnić, że proste BD i OS sa prostopadłe.

6. W krainie paprotek postawiono 2002 pomniki ze spiżu ku czci króla Saicama. Między każdymi dwoma pomnikami istnieje dokładnie jedno połaczenie: na piechotę na pierwszy sposób, na piechotę na drugi sposób, na piechotę na trzeci sposób, na piechotę na czwarty sposób, na piechotę na piaty sposób. Dowieść, że istnieja takie trzy pomniki, między którymi połaczenia sa tego samego typu

7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c udowodnić nierównosć:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}$$

8. W trójkacie ostrokatnym ABC punkt O jest srodkiem okręgu opisanego, zas punkt H jest punktem przecięcia wysokosci. Prosta AH przecina okrag opisany na trójkacie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinaja się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem srodka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinaja się w punkcie R. Dowiesć, że $BP = CR$