Kółko 9 VI 2005 - Sumowanie - rozwiązania

Rozwiązania

0a. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

Rozwiązanie

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

0b. Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$.

Rozwiązanie

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.$$

0c. Wykaż, że dla $n \in N$ zachodzi: $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)2^{n-2}$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie przez bajeczke. Jest grupa n krasnoludków, wybierają ekipę do pracy w kopalni. Chcą wybrać ekipę, szefa i zastępce. Liczymy na ile sposobów mogę wybrać tę ekipę.

I sposób:

Wybierają ekipę: $\binom{n}{i}$, dla $i \geqslant 2$, szefa na i sposobów, zastępce na $i-1$ sposobów, wiec w sumie wychodzi:

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}.$$

II sposób:

Wybierają szefa na n sposobów, zastępce na $n-1$ sposobów i dobierają resztę na 2^{n-2} sposobów (każdy z $n-2$ krasnali idzie do kopalni, albo nie). Zatem wynik to: $n(n-1)2^{n-2}$.

0d. Wykaż, że dla $n \in N$ zachodzi: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Rozwiązanie

Niech $P(x) = (x+1)^n(x+1)^n$. Liczymy na dwa różne sposoby współczynnik przy x^n.

I sposób:

Sumujemy po i iloczyny współczynników przy x^i w pierwszym nawiasie i współczynników przy x^{n-i} w drugim nawiasie.

$a_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2$.

II sposób:

$P(x) = (x+1)^{2n}$, więc $a_n = \binom{2n}{n}$. ∎

0e. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy tak zwaną metodą zaburzania.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 + \sum_{i=0}^{n-1} 3i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} 3i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3n^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i - 3n - n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3n^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} - 4n$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 - 3n(n-1) + 4n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

0f. Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}$.

Rozwiązanie

$\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i} = (2+1)^n = 3^n$.