Rozwiązanie I

Lemat Liczba ścieżek długości $2k$ zaczynających się i kończących w 0 jest równa liczbie ścieżek długości $2k$ zaczynających się w 0 i niedotykających potem 0 ponownie.

Dowód Lematu

Oczywiście ścieżek zaczynających się i kończących w 0 jest $\binom{2k}{k}$. Z drugiej strony ścieżki po drugiej stronie równości to odpowiednio:

(a) cały czas dodatnie oprócz pierwszego węzła

(b) cały czas ujemne oprócz pierwszego węzła

Przez symetrię liczby ścieżek w (a) i (b) są równe. Oznaczmy je przez A. Policzmy A - są to ścieżki zawsze dodatnie. Zatem pierwszym ruchem musi być pójście w górę. Dalej wszystkich ścieżek kończących się na poziomach 0,2,4 itd. jest:

$$\binom{2k-1}{k-1} + \binom{2k-1}{k-2} + \binom{2k-1}{k-3} + \ldots + \binom{2k-1}{0}$$

Bo wybieramy co najwyżej $k-1$ pójść w dół. Jednocześnie z zasady odbicia wśród nich ścieżek które dotykają 0 jest tyle co ścieżek kończących się tam gdzie trzeba, ale zaczynających się w -1, czyli:

$$\binom{2k-1}{k-2} + \binom{2k-1}{k-3} + \binom{2k-1}{k-4} + \ldots + \binom{2k-1}{0}$$

Gdyż wybieram co najwyżej $k-2$ pójść w dół. Zatem A musi być różnicą tych dwóch liczb, czyli $A = \binom{2k-1}{k-1}$. Zatem w sumie po prawej stronie równości z tezy mamy

$$2A = 2\binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k-1} + \binom{2k-1}{k} = \binom{2k}{k}$$

Co jest tezą.

Dowód zadania

Zauważmy, że $\sum_{i+j=n} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}$ to przeliczenie wszystkich ścieżek długości $2n$ o początku i końcu w zerze oraz wyróżnionym punktem z zerem. $4^n = 2^{2n}$ jest zaś liczbą wszystkich ścieżek. Odejmijmy więc od obu stron te, w których punkt wyróżniony jest ostatnim zerem (czyli jest na końcu). Musimy teraz pokazać, że liczba ścieżek o początku i końcu w zerze z wyróżnionym niekońcowym zerem jest równa liczbie wszytskich ścieżek niekończących się w zerze. Weźmy zatem tę ścieżkę z wyróżnionym zerem i zamieńmy fragment od wyróżnionego zera do końca za pomocą bijekcji którą dostarcza nam lemat. Wówczas uzyskamy ścieżkę niekończącą się w 0, z której da się odkodować jednoznacznie wejściową ścieżkę wraz z wyróżnieniem, bo wyróżnione 0 to ostatnie w nowej ścieżce. Zatem skonstruowaliśmy szukaną bijekcję.

Rozwiązanie II

Na początku będziemy używali kilku faktów. Liczby Catalana zdefiniowane są rekurencyjnie poprzez:

$$c_0 = 1, c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$$

Można wyprowadzić, (co np. jest w „Matematyce konkretnej”), że zachodzi $c_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Rozpatrzmy enumerator liczb Catalana $C(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ dla z zespolonego w otoczeniu 0 (liczby Catalna są ograniczone z góry przez 4^n, więc w otoczeniu 0 szereg jest bezwzględnie zbieżny). Z wzoru rekurencyjnego mamy, że splot tego szeregu z samym sobą jest nim samym przesuniętym o jedno miejsce w lewo, więc $C(z)$ spełnia równość dla $z \neq 0$:

$$C(z)C(z) = \frac{C(z) - 1}{z}$$

Więc przeliczając:

$$z(C(z))^2 - C(z) + 1 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Gdzie wybrany jest minus, $C(z)$ było ciągłe w zerze. Zatem

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{2i}{i}}{i+1} z^i =$$

Stąd:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{2i}{i}}{i+1} z^{i+1}$$

Obustronnie różniczkując w obszarze zbieżności:

$$(\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2})' = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} z^i$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 4z}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} z^i$$

Zauważmy że teraz jeśli przez l_n oznaczymy lewą stronę tożsamości zadania, to enumeratorem $L(z)$ ciągu l_n będzie splot szeregu po lewej stronie tej równości z samym sobą. Stąd:

$$\frac{1}{1 - 4z} = L(z)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 4^i z^i = L(z)$$

Stąd mamy, że $l_n = 4^n$, czyli tezę.

Plan wykładu

1 Liczby Catalana i ich interpretacje kombinatoryczne:

(a) Liczba poprawnych wyrażeń nawiasowych długości $2n$.

(b) Liczba n wierzchołkowych niepełnych drzew binarnych (bijekcja z b - w nawiasie lewy syn, potem prawy)

(c) Liczba różnych triangulacji otykietowanego n-kąta foremnego.

(d) Liczba nieujemnych ścieżek długości $2n$ zaczynających się i kończących w 0.

(e) Wzór rekurencyjny: $C_n = \sum_{i=0} n - 1 C_i C_{n-1-i}$

2 Dowód zasadą odbicia, że $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

3 Pokazanie rozwiązania zadania jako zaawansowanej metody odbicia.

4 Pokazanie funkcji tworzących na przykładzie ciągu Fibonacciego.

5 Pokazanie, że $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ przez splot $\frac{1}{1-z}$ i $\frac{1}{1-2z}$.

6 Pokazanie rozwiązania zadania.

4. $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_n z^n$. Więc $z^2 F(z) + zF(z) = F(z) - z$. Czyli $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$. Pierwistki tego na dole to $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ i sprawdzając $\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-za_1} + \frac{B}{1-za_2}$ dostajemy A i B. Dalej rozwijamy $1 - za_i$ i mamy pro. $(A + B = 0$, $Aa_2 + Ba_1 = -1$, czyli $A(a_2 - a_1) = -1$, czyli $A = \frac{1}{\sqrt{5}})$

5. Oczywiście $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ to współczynnik przy z^n w $\frac{1}{(1-z)(1-2z)}$. Rozkładając na ułamki proste $\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z}$ mamy $A + B = 1$ oraz $-2A - B = 0$, czyli $B = 2$ i $A = -1$. Stąd $-\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$ i współczynnik z pierwszego wyrazu to -1 a z drugiego to 2.