

Nierówności II

-1. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

0. Pokazać, że jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to zachodzi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

1. Pokazać, że jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to zachodzi:

$$abc \geq 8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

2. Liczby rzeczywiste a, b, c należą do przedziału $(0, 1]$ oraz suma dowolnych dwóch z nich jest większa od 1. Pokazać, że:

$$\frac{a}{b+c-1} + \frac{b}{c+a-1} + \frac{c}{a+b-1} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

3 (LVI OM). Liczby rzeczywiste a, b, c należą do przedziału $[0, 1]$. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

4. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c sumujących się do 1 zachodzi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (1-a)(1-b)(1-c) + abc$$

5. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c o iloczynie 1 zachodzi:

$$a^8 + b^8 + c^8 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geq 2(ab^3 + bc^3 + ca^3)$$

6. Pokazać, że dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

7 (Nierówność Czebyszewa). Pokazać, że jeśli $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ oraz $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ są ciągami liczb rzeczywistych to zachodzi:

$$n \sum_{i=0}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i \right)$$

8. Pokazać, że dla a, b, c boków trójkąta zachodzi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}$$

9. Pokazać, że dla a, b, c boków trójkąta zachodzi:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

10. Pokazać, że dla a, b, c boków trójkąta o polu P zachodzi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}S$$

11 (LVII OM). Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c spełniających warunek $ab + bc + ca = abc$ zachodzi:

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1$$