Mecz matematyczny

grupa dinozaurów

piątek, 28 września 2007

1. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, a t dowolną prostą przechodzącą przez jego ortocentrum H. Pokazać, że odbicia t względem prostych zawierających boki trójkąta przecinają się w jednym punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

2. Niech w trójkącie ostrokątnym ABC BH będzie wysokością, BM - środkową, a punkty P i Q - rzutami prostokątnymi punktów A i C na dwusieczną kąta ABC. Wykazać, że:

(a) Punkty P, Q, M, H leżą na jednym okręgu.

(b) Środek tego okręgu leży na okręgu 9 punktów trójkąta ABC.

(c) Rzut środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC na bok AC jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PHQ.

3. Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Prosta BO przecina okrąg ω ponownie w punkcie D. Prosta zawierająca wysokość trójkąta ABC spuszczoną z wierzchołka A przecina okrąg ω ponownie w E. Pokazać, że pole czworokąta $BECD$ jest równe polu trójkąta ABC.

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi $\angle ADC = 30°$ oraz $BD = AB + BC + CA$. Pokazać, że półprosta BD jest dwusieczną kąta $\angle ABC$.

5. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}^2$$

6. Pokazać, że istnieje nieskończony zbiór liczb parami względnie pierwszych postaci $2^n - 3$, gdzie $n \geqslant 2$.

7. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = abc$. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2}$$

8. Skrzypczusie włamały się do sejfu i obejrzały film „Piraci”. Za karę Skrzypen postanowił zamknąć je w klatce w kształcie sześcianu i umieścić je w jej wierzchołkach. Skrzypczusiom wolno zamieniać się miejscami, przy czym zamiana polega na tym, że w jednej chwili każdy Skrzypczuś przenosi się do innego wierzchołka klatki, tak, by wszystkie wierzchołki były zajęte. Skrzypen obiecał, że je wypuści, jeśli uda im się wykonać taką zamianę, że żadne 3 Skrzypczusie nie znajdą się po zamianie w wierzchołkach trójkąta przystającego do tego, w którym były przed zamianą. Czy Skrzypczusiom uda się odzywskać wolność i obliczyć hiperbolę?

9. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że można wybrać co najmniej $2^{n-1} + n$ takich liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$, że dla dowolnych wybranych dwóch różnych liczb x i y, $x + y$ nie dzieli xy.

10. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 2007×2007 można pokryć klockami w kształcie kwadratu 2×2 z wyciętym rogiem.

11. Niech $W(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, zaś $A = \{3, 7, 19, 541\}$. Dla każdego n istnieje takie $p \in A$, że $p \mid W(n)$. Udowodnić, że istnieje takie $p \in A$, dla którego zachodzi $p \mid W(n)$ dla każdego n.

Mecz matematyczny

grupa pterodaktyli

piatęk, 28 września 2007

1. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, a t dowolną prostą przechodzącą przez jego ortocentrum H. Pokazać, że odbicia t względem prostych zawierających boki trójkąta przecinają się w jednym punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

2. Niech w trójkącie ostrokątnym ABC BH będzie wysokością, BM - środkową, a punkty P i Q - rzutami prostokątnymi punktów A i C na dwusieczną kąta ABC. Wykazać, że:

(a) Punkty P, Q, M, H leżą na jednym okręgu.

(b) Środek tego okręgu leży na okręgu 9 punktów trójkąta ABC.

(c) Rzut środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC na bok AC jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PHQ.

3. Ciągi a_n, b_n spełniają warunki:

(a) $a_0 = 1, b_0 = 4$

(b) $a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n$ dla $n \geqslant 0$.

Pokazać, że w tych ciągach nie ma wyrazów podzielnych przez 2003.

4. Niech f i g będą wielomianami o współczynnikach wymiernych, z których żaden nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych. Niech a, b będą liczbami zespolonymi a, b takimi, że $f(a) = g(b) = 0$. Udowodnij, że jeśli $a + b$ jest wymierne to f i g mają ten sam stopień.

5. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}^2$$

.

6. Dany jest zbiór S złożony z $n \geqslant 3$ punktów na płaszczyźnie, z których nie wszystkie leżą na jednej prostej. Pokazać, że spośród prostych łączących pary punktów ze zbioru S można wyróżnić przynajmniej n parami różnych prostych.

7. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = abc$. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2}$$

8. Skrzypczusie włamały się do sejfu i obejrzały film „Piraci”. Za karę Skrzypen postanowił zamknąć je w klatce w kształcie sześcianu i umieścić je w jej wierzchołkach. Skrzypczusiom wolno zamieniać się miejscami, przy czym zamiana polega na tym, że w jednej chwili każdy Skrzypczuś przenosi się do innego wierzchołka klatki, tak, by wszystkie wierzchołki były zajęte. Skrzypen obiecał, że je wypuści, jeśli uda im się wykonać taką zamianę, że żadne 3 Skrzypczusie nie znajdą się po zamianie w wierzchołkach trójkąta przystającego do tego, w którym były przed zamianą. Czy Skrzypczusiom uda się odzywskać wolność i obliczyć hiperbolę?

9. Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC wpisany w okrąg o. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie A_1 i o ponownie w A_2. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie B_1 i o ponownie w B_2. Proste A_1B_1 i A_2B_2 przecinają się w P. Pokazać, że jeśli I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, to $PI \| AB$.

10. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 2007×2007 można pokryć klockami w kształcie kwadratu 2×2 z wyciętym rogiem.

11. Dany jest trójkąt ABC. Niech AXC i BYC będą takimi trójkątami zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC, że $\angle CAX + \angle CBY = 180°$ oraz $\angle ACX = \angle BCY = 30°$. Udowodnić, że wszystkie proste XY odpowiadające różnym położeniom punktów X i Y mają punkt wspólny.