Klasóweńka

grupa pierwszoklasistów

sobota, 29 września 2007

51. Niech $P(x)$ będzie wielomianem n-tego stopnia o współczynnikach wymiernych dla którego zachodzi $P(k) = 2^k$ dla $k = 0, 1, ..., n$. Znaleźć $P(n+1)$.

52. Udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y, z > 1$ spełniających $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ zachodzi:

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

53. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta AD przecina okrąg wpisany ponownie w punkcie K. Pokazać, że prosta EK połowi odcinek AF wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$.

54. Pokazać, że dla liczby pierwszej p:

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \ (mod\ p^2)$$

55. W trójkącie ABC punkty I, O_A, O_B, O_C są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i dopisanych stycznych do boków BC, CA, AB. Niech k będzie prostą przechodzącą przez I oraz środek ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że obrazy prostej k w symetriach względem O_AO_B, O_BO_C, O_CO_A przecinają się w jednym punkcie.

Klasóweczka

grupa młodsza

sobota, 29 września 2007

52. Udowodnić, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y, z > 1$ spełniających $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$ zachodzi:

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

53. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta AD przecina okrąg wpisany ponownie w punkcie K. Pokazać, że prosta EK połowi odcinek AF wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BC$.

54. Pokazać, że dla liczby pierwszej p:

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \ (mod\ p^2)$$

55. W trójkącie ABC punkty I, O_A, O_B, O_C są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i dopisanych stycznych do boków BC, CA, AB. Niech k będzie prostą przechodzącą przez I oraz środek ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że obrazy prostej k w symetriach względem O_AO_B, O_BO_C, O_CO_A przecinają się w jednym punkcie.

57. Rozwiązać układ równań

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z}+1, \frac{1}{yz} = \frac{y}{x}+1, \frac{1}{xz} = \frac{z}{y}+1$$

w liczbach rzeczywistych.

Klasówka

grupa starsza

sobota, 29 września 2007

54. Pokazać, że dla liczby pierwszej p:

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \ (mod\ p^2)$$

55. W trójkącie ABC punkty I, O_A, O_B, O_C są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i dopisanych stycznych do boków BC, CA, AB. Niech k będzie prostą przechodzącą przez I oraz środek ciężkości trójkąta ABC. Wykazać, że obrazy prostej k w symetriach względem O_AO_B, O_BO_C, O_CO_A przecinają się w jednym punkcie.

56. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p, q dla których liczba $\frac{(7^p-2^p)(7^q-2^q)}{pq}$ jest całkowita.

57. Rozwiązać układ równań

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1, \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1, \frac{1}{xz} = \frac{z}{y} + 1$$

w liczbach rzeczywistych.

58. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geqslant \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

59. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio BD i AC. Wykazać, że $\angle AND = \angle ANB$ wtedy i tylko wtedy gdy $\angle DMA = \angle DMC$.

Klasówsko

grupa najstarsza

funkcje, 29 tworzące 2007

51. Niech $P(x)$ będzie wielomianem n-tego stopnia o współczynnikach wymiernych dla którego zachodzi $P(k) = 2^k$ dla $k = 0, 1, ..., n$. Znaleźć $P(n+1)$.

58. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geqslant \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

59. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio BD i AC. Wykazać, że $\angle AND = \angle ANB$ wtedy i tylko wtedy gdy $\angle DMA = \angle DMC$.

510. Dany jest czworościan $ABCD$. Niech π będzie płaszczyzną styczną w punkcie A do sfery opisanej na $ABCD$. Niech l_1, l_2, l_3 będą prostymi wzdłuż których płaszczyzny ABC, ABD i ACD przecinają płaszczyznę π. Udowodnij, że jeżeli l_1, l_2, l_3 tworzą ze sobą parami kąty $60°$ to iloczyny długości przeciwległych krawędzi czworościanu $ABCD$ są równe.

511. Rozstrzygnąć czy istnieje, a jeśli tak to wskazać, wielomian całkowitoliczbowy który nie ma pierwiastka całkowitego, ale ma pierwiastek w dowolnym ciele $\mathbb{Z}_p$.

512. Zbiór ciągów arytmetycznych $\{a_1k+b_1\}, \{a_2k+b_2\}, \ldots, \{a_nk+b_n\}$ dla a, b, k całkowitych nazywamy *pokryciem* jeśli każda dodatnie liczba całkowita występuje dokładnie w jednym z nich (np. ciągi $\{2k\}, \{4k+1\}, \{4k+3\}$). Pokazać, że dla każdego pokrycia zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 1$.