Zadania - dzień drugi

grupa pierwszoklasistów

wtorek, 25 września 2007

21. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych x, y, z równania:

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

22. Udowodnić nierówność dla a, b, c nieujemnych:

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 2(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

23. Dany jest wielokąt $A_1A_2A_3...A_n$. Skonstruować takie punkty B_1, B_2, ..., B_n, aby punkty A_1, A_2, ..., A_n były odpowiednio środkami odcinków B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$, B_nB_1.

24. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta, a okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że jeśli punkty P, Q i O są parami różne, to kąt PQO jest prosty.

25. Skrzypen nie chciałby wpuścić swoich 37 Skrzypusiów do prywatnych zasobów filmowych. Zamontował więc sejf i umieścił w nim film „Piraci”. Teraz Skrzypen chce założyć na sejfie zamki i rozdać każdemu Skrzypusiowi pewną liczbę kluczy tak, aby

(a) dowolnych 36 Skrzypusiów mogło otworzyć sejf,

(b) żadnych 35 Skrzypusiów nie mogło otworzyć sejfu.

Ile co najmniej zamków musi zamontować Skrzypen?

Zadania - dzień drugi

grupa młodsza

wtorek, 25 września 2007

22. Udowodnić nierówność dla a, b, c nieujemnych:

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 2(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

23. Dany jest wielokąt $A_1A_2A_3...A_n$. Skonstruować takie punkty B_1, B_2, ..., B_n, aby punkty A_1, A_2, ..., A_n były odpowiednio środkami odcinków B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$, B_nB_1.

24. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta, a okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że jeśli punkty P, Q i O są parami różne, to kąt PQO jest prosty.

25. Skrzypen nie chciałby wpuścić swoich 37 Skrzypusiów do prywatnych zasobów filmowych. Zamontował więc sejf i umieścił w nim film „Piraci”. Teraz Skrzypen chce założyć na sejfie zamki i rozdać każdemu Skrzypusiowi pewną liczbę kluczy tak, aby

(a) dowolnych 36 Skrzypusiów mogło otworzyć sejf,

(b) żadnych 35 Skrzypusiów nie mogło otworzyć sejfu.

Ile co najmniej zamków musi zamontować Skrzypen?

26. Czy płaszczyznę można pomalować 2007 kolorami, tak że każde koło zawiera co najmniej jeden punkt każdego koloru?

Zadania - dzień drugi

grupa starsza

wtorek, 25 września 2007

22. Udowodnić nierówność dla a, b, c nieujemnych:

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 2(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

23. Dany jest wielokąt $A_1A_2A_3...A_n$. Skonstruować takie punkty B_1, B_2, ..., B_n, aby punkty A_1, A_2, ..., A_n były odpowiednio środkami odcinków B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$, B_nB_1.

24. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta, a okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że jeśli punkty P, Q i O są parami różne, to kąt PQO jest prosty.

27. Ciąg $\{a_n\}$ liczb naturalnych spełnia zależność:

$$a_1 = 2, a_n = \lfloor \frac{3a_{n-1}}{2} \rfloor$$

Pokazać, że w ciągu tym możemy znaleźć nieskończenie wiele liczb parzystych i nieskończenie wiele liczb nieparzystych.

28. Czy istnieje ciąg $a_1, a_2, a_3...$ liczb rzeczywistych i niestały wielomian $P(x)$ tak, że zachodzi równość $a_m + a_n = P(mn)$ dla m, n całkowitych dodatnich?

29. Czy płaszczyznę można pomalować 2007 kolorami, tak że na każdym okręgu leży co najmniej jeden punkt każdego koloru?

Zadania - dzień drugi

grupa najstarsza

wtorek, 25 września 2007

24. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta, a okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punktach P i Q. Udowodnić, że jeśli punkty P, Q i O są parami różne, to kąt PQO jest prosty.

28. Czy istnieje ciąg $a_1, a_2, a_3...$ liczb rzeczywistych i niestały wielomian $P(x)$ tak, że zachodzi równość $a_m + a_n = P(mn)$ dla m, n całkowitych dodatnich?

29. Czy płaszczyznę można pomalować 2007 kolorami, tak że na każdym okręgu leży co najmniej jeden punkt każdego koloru?

210. Wyznaczyć najmniejszą liczbę nieparzystą $n \geqslant 1$ o nastepującej własności: istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których kwadraty są równe sumom kwadratów n kolejnych liczb naturalnych.

211. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi:

$$\sum_{i+j=n} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j} = 4^n$$