Zawody indywidualne, dzień 0

grupa pierwszoklasistów

niedziela, 23 września 2007

1. Dwustu uczniów brało udział w olimpiadzie matematycznej. Mieli do zrobienia 6 zadań. Wiadomo, że każde zadania zrobiło co najmniej 120 uczniów. Pokazać, że istnieje dwóch uczniów takich, że każde zadanie zostało zrobione przez co najmniej jednego z nich.

2. Ile najwyżej nienachodzących na siebie kwadratów 2×2 da się ułożyć na szachownicy $n \times n$ tak, aby boki kwadratów biegły wzdłuż linii podziału pól?

3. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sumują się do 1. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n \leqslant \frac{1}{4}$$

4. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty E i F należą odpowiednio do boków AB i BC tego kwadratu i $BE = BF$. Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą EC. Wykazać, że kąt DSF jest prosty.

Zawody indywidualne, dzień 0

grupa młodsza

niedziela, 23 września 2007

1. Dwustu uczniów brało udział w olimpiadzie matematycznej. Mieli do zrobienia 6 zadań. Wiadomo, że każde zadania zrobiło co najmniej 120 uczniów. Pokazać, że istnieje dwóch uczniów takich, że każde zadanie zostało zrobione przez co najmniej jednego z nich.

3. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sumują się do 1. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n \leqslant \frac{1}{4}$$

4. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty E i F należą odpowiednio do boków AB i BC tego kwadratu i $BE = BF$. Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą EC. Wykazać, że kąt DSF jest prosty.

6. Znaleźć liczbę podzbiorów M zbioru $\{1, 2, \ldots, 36\}$ o następującej własności:

Dla każdych dwóch różnych elementów $x, y \in M$ również $|x - y| \in M$.

Zawody indywidualne, dzień 0

grupa starsza

niedziela, 23 września 2007

1. Dwustu uczniów brało udział w olimpiadzie matematycznej. Mieli do zrobienia 6 zadań. Wiadomo, że każde zadania zrobiło co najmniej 120 uczniów. Pokazać, że istnieje dwóch uczniów takich, że każde zadanie zostało zrobione przez co najmniej jednego z nich.

3. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sumują się do 1. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n \leqslant \frac{1}{4}$$

5. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna wewnętrzna kąta $\angle ABC$ przecina bok AC w punkcie D. Punkty E i F są odpowiednio rzutami punktów A i C na prostą BD. Punkt M jest rzutem punktu D na prostą BC. Pokazać, że $\angle EMD = \angle FMD$.

6. Znaleźć liczbę podzbiorów M zbioru $\{1, 2, \ldots, 36\}$ o następującej własności:

Dla każdych dwóch różnych elementów $x, y \in M$ również $|x - y| \in M$.

Zawody indywidualne, dzień 0

grupa najstarsza

niedziela, 23 września 2007

5. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna wewnętrzna kąta $\angle ABC$ przecina bok AC w punkcie D. Punkty E i F są odpowiednio rzutami punktów A i C na prostą BD. Punkt M jest rzutem punktu D na prostą BC. Pokazać, że $\angle EMD = \angle FMD$.

6. Znaleźć liczbę podzbiorów M zbioru $\{1, 2, \ldots, 36\}$ o następującej własności:

Dla każdych dwóch różnych elementów $x, y \in M$ również $|x - y| \in M$.

7. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{e+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+e} + \frac{e}{d+e+a} \leqslant 2$$

8. Pokazać, że istnieją dwa kolejne kwadraty liczb naturalnych, pomiędzy którymi jest co najmniej 2007 liczb pierwszych.