Klasóweczka

grupa pierwszoklasistów

sobota, 2 października 2004

71. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to zachodzi nierówność

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \geqslant 27(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a).$$

72. Mając dane rysunki rzutów ostrosłupa czworokątnego na płaszczyznę (patrz druga kartka) narysować, przy pomocy samej linijki, przekroje ostrosłupa płaszczyzną ABC. Opisać, co, w jakiej kolejności i dlaczego było robione.

73. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równość

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)=0.$$

74. Danych jest $n>1$ osób, z których niektóre znają się między sobą. Jeśli pewna osoba organizuje imprezę, zaprasza wszystkich swoich znajomych i wszyscy uczestnicy imprezy poznają się. Po pewnym czasie każda osoba zorganizowała imprezę, po czym okazało się, że są jeszcze dwie osoby, które się nie znają. Wykazać, że na najbliższej imprezie te dwie osoby również się nie poznają.

75. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

76. *Superliczbą Grabowskiego* G_n nazywamy liczbę złożoną w zapisie dziesiętnym z n jedynek, po których następuje n dwójek, np. liczby $12, 1122, 111222$ są *superliczbami Grabowskiego*, zaś liczby $1212, 11122$ nie są. Wykazać, że jeśli liczba p jest pierwsza, to

$$p \mid G_p - 12.$$

Klasóweczka

grupa młodsza

sobota, 2 października 2004

71. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to zachodzi nierówność

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geqslant 27(a + b - c)(c + a - b)(b + c - a).$$

72. Mając dane rysunki rzutów ostrosłupa czworokątnego na płaszczyznę (patrz druga kartka) narysować, przy pomocy samej linijki, przekroje ostrosłupa płaszczyzną ABC. Opisać, co, w jakiej kolejności i dlaczego było robione.

74. Danych jest $n > 1$ osób, z których niektóre znają się między sobą. Jeśli pewna osoba organizuje imprezę, zaprasza wszystkich swoich znajomych i wszyscy uczestnicy imprezy poznają się. Po pewnym czasie każda osoba zorganizowała imprezę, po czym okazało się, że są jeszcze dwie osoby, które się nie znają. Wykazać, że na najbliższej imprezie te dwie osoby również się nie poznają.

75. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

76. *Superliczbą Grabowskiego* G_n nazywamy liczbę złożoną w zapisie dziesiętnym z n jedynek, po których następuje n dwójek, np. liczby $12, 1122, 111222$ są *superliczbami Grabowskiego*, zaś liczby $1212, 11122$ nie są. Wykazać, że jeśli liczba p jest pierwsza, to

$$p \mid G_p - 12.$$

77. Wielomian $W(x)$ stopnia niewiększego niż n spełnia dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ równość

$$P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

Obliczyć wartość $P(n + 1)$.

Klasóweczka

grupa starsza

sobota, 2 października 2004

71. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to zachodzi nierówność

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \geqslant 27(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a).$$

72. Mając dane rysunki rzutów ostrosłupa czworokątnego na płaszczyznę (patrz druga kartka) narysować, przy pomocy samej linijki, przekroje ostrosłupa płaszczyzną ABC. Opisać, co, w jakiej kolejności i dlaczego było robione.

74. Danych jest $n > 1$ osób, z których niektóre znają się między sobą. Jeśli pewna osoba organizuje imprezę, zaprasza wszystkich swoich znajomych i wszyscy uczestnicy imprezy poznają się. Po pewnym czasie każda osoba zorganizowała imprezę, po czym okazało się, że są jeszcze dwie osoby, które się nie znają. Wykazać, że na najbliższej imprezie te dwie osoby również się nie poznają.

78. Dany jest czworościan $ABCD$ oraz punkty K, L, M i N takie, że

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CD}.$$

Wykazać, że objętość czworościanu $KLMN$ jest dwa razy większa niż czworościanu $ABCD$.

79. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, zaś liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takimi liczbami dodatnimi, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}.$$

Klasóweczka

grupa najstarsza

sobota, 2 października 2004

71. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to zachodzi nierówność

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \geqslant 27(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a).$$

79. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą, zaś liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takimi liczbami dodatnimi, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ oraz $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}.$$

710. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n takiej, że $3 \mid n$, zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n}{i} \binom{n-k}{n-2k-i} (-1)^i = \binom{n}{\frac{n}{3}}.$$

711. Wykazać, że cztery punkty przecięcia dwóch parabol o prostopadłych kierownicach leżą na jednym okręgu.

712. Dany jest zbiór liczb od 1 do $n+1$. Mówimy, że dwie uporządkowane n-tki są ze sobą *zaprzyjaźnione*, gdy istnieją takie różne indeksy i oraz j, że na i-tym indeksie w pierwszej n-tce jest ta sama liczba, która jest na j-tym indeksie w drugiej n-tce. Wyznaczyć maksymalną moc zbioru n-tek, takiego, że każde dwie są ze sobą *zaprzyjaźnione*.

713. Okregi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach X i Y. Prosta k przecina okrąg ω_1 w punktach A i X, zaś okrąg ω_2 w punktach X i B. Punkt P_1 należy do odcinka AX, zaś punkt P_2 do odcinka XB. Prosta YP_1 przecina okrąg ω_1 w punktach Y i Q_1, zaś prosta YP_2 okrąg ω_2 w punktach Y i Q_2. Okręgi opisane na trójkątach AP_2Y i BP_1Y przecinają się w punktach Y i Z. Wykazać, że punkty Q_1, Q_2, Z i Y leżą na jednym okręgu.