Pierwsze zawody indywidualne

grupa pierwszoklasistów

niedziela, 26 września 2004

11. Joasia i Onufry grają w grę. Na szachownicy 541×541 w lewym dolnym rogu stoi wieża. Gracze ruszają się na przemian, ruch polega na przesunięciu wieży o dowolną ilość pól w górę lub w prawo. Rozpoczyna Joasia. Czy Onufry może wygrać, niezależnie od gry Joasi?

12. Odcinki AK i BL są wysokościami w trójkacie ostrokątnym ABC. Prosta KL przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach G i H, przy czym punkt G leży na krótszym łuku BC, zaś punkt H na krótszym łuku AC. Pokazać, że dwusieczna kąta BCG odcina z kąta BGK trójkąt równoramienny.

13. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0.$$

Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 26 września 2004

11. Joasia i Onufry grają w grę. Na szachownicy 541×541 w lewym dolnym rogu stoi wieża. Gracze ruszają się na przemian, ruch polega na przesunięciu wieży o dowolną ilość pól w górę lub w prawo. Rozpoczyna Joasia. Czy Onufry może wygrać, niezależnie od gry Joasi?

12. Odcinki AK i BL są wysokościami w trójkacie ostrokątnym ABC. Prosta KL przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach G i H, przy czym punkt G leży na krótszym łuku BC, zaś punkt H na krótszym łuku AC. Pokazać, że dwusieczna kąta BCG odcina z kąta BGK trójkąt równoramienny.

13. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0.$$

14. Dana jest liczba całkowita dodatnia k. Ciąg (a_n) definiujemy następująco: $a_0 = 1$ i dla $n > 0$: $a_n = kn + a_{n-1}(-1)^n$. Wyznaczyć wszystkie liczby k, dla których 2000 jest wyrazem ciągu a_n.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 26 września 2004

13. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0.$$

15. Niech a i b będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym a jest nieparzyste. Zdefiniujmy ciąg u_n następująco: $u_0 = b$,

$$u_n = \begin{cases} \frac{u_{n-1}}{2}, 2 \mid u_{n-1} \\ u_{n-1} + a, 2 \nmid u_{n-1} \end{cases} .$$

Wykazać, że ciąg u_n jest okresowy od pewnego miejsca.

16. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB, CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z prostymi BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

17. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, w których równanie $x + y = 2n + 1$ nie ma rozwiązań.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa najstarsza

niedziela, 26 września 2004

15. Niech a i b będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym a jest nieparzyste. Zdefiniujmy ciąg u_n następująco: $u_0 = b$,

$$u_n = \begin{cases} \frac{u_{n-1}}{2}, 2 \mid u_{n-1} \\ u_{n-1} + a, 2 \nmid u_{n-1} \end{cases} .$$

Wykazać, że ciąg u_n jest okresowy od pewnego miejsca.

16. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB, CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z prostymi BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

17. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, w których równanie $x + y = 2n + 1$ nie ma rozwiązań.

18. W nierównoramiennym trójkącie ostrokątnym ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, AC i AB odpowiednio w punktach K, L i M. Punkt N jest środkiem odcinka LM. Punkt D jest takim punktem na prostej KL, zaś E takim punktem na prostej KM, że proste LM, CE i BD są równoległe. Wykazać, że punkty D, E i N są współliniowe.