

Teoria liczb - zadania

1. Udowodnij, że:

- $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$
- $n \mid m \Rightarrow F_n \mid F_m$
- $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$

2. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli p dzieli liczbę złożoną z p jedynek w zapisie dziesiętnym to $p = 3$.

3. Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to wtedy n jest potęgą dwójki.

4. Wykaż, że jeśli ciąg arytmetyczny o różnicy $r \in \mathbb{N}$ oraz ciąg geometryczny o ilorazie $q \in \mathbb{N}$ mają jeden wspólny wyraz oraz $p \perp q$, to wtedy mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów

5. Niech $a, b \in \mathbb{N}$ oraz niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

6. Wykaż, że w ciągu Fibonacciego występuje nieskończenie wiele wyrazów kończących 2004 zerami.

7. Wykaż, że równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.