Jensen

Twierdzenie Jensena. *Jeżeli f jest funkcją wypukłą w pewnym przedziale, to dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, (n \geqslant 2)$ z tego przedziału oraz liczb nieujemnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takich, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ zachodzi nierówność*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

1. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

2. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leqslant \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$, których suma kwadratów jest równa 1, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - a_i\right) \geqslant \Big(n-1\Big)\sqrt{n}.$$

5. (*Nierówność Fan-Tsy*) Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2 \ldots, a_n$ z przedziału $\Big(0, \frac{1}{2}\Big)$ zachodzi nierówność

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} \Big(1-a_i\Big)}{\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(1-a_i\Big)\Big)^n}.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} < \sqrt{2(a+b+c)}.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a(a+b-c)^2 + b(b+c-a)^2 + c(c+a-b)^2 \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c}.$$