Grafy

Definicje

Graf - wierzchołki i krawędzie pomiędzy nimi. G oznaczamy graf, V zbiór wierzchołków, E zbiór krawędzi.
Stopień wierzchołka to ilość krawędzi z niego wychodzących, oznaczamy $deg(v)$.
Cykl Eulera to cykl, który przechodzi przez wszystkie krawędzie.
Cykl Hamiltona to cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki dokładnie jeden raz.
Graf dwudzielny to taki, którego wierzchołki da się podzielić na dwa zbiory A i B takie, że pomiędzy dwoma wierzchołkami z tego samego zbioru nie ma krawędzi.
Graf spójny to taki, w którym da się przejść z każdego wierzchołka do każdego.
Graf jest drzewem, gdy jest spójny i nie ma cyklu.
Graf jest planarny, gdy da się go narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały.

Fakciki

1. Lemat o uściskach dłoni - $\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$.

2. Jeśli w grafie G zachodzi $\forall_{v\in V} deg(v) \geqslant 2$, to istnieje cykl.

3. Jeśli graf G jest spójny, $|V| = n, |E| = n - 1$, to graf G jest drzewem.

4. Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy w G nie ma cyklu nieparzystej długości

5. Jeśli $\forall_{v\in V} 2 \mid deg(v)$, to graf G ma cykl Eulera.

6. *Tw. Orego* Jeśli graf G jest spójny, n-liczba wierzchołków spełnia $n > 3$ oraz dla każdej pary wierzchołków niepołączonych krawędzią suma ich stopni jest większa lub równa od n, to wtedy graf G ma cykl Hamiltona.

7. *Wniosek Diraca.* Jeśli $\forall_{v\in V} deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G ma cykl Hamiltona.

8. *Tw. Halla* Jeśli mamy n chłopców i $m \geqslant n$ dziewczynek, i zachodzi warunek Halla, czyli każda grupa k chłopców połączywszy swoją wiedzę zna niemniej niż k dziewczynek, to można dziewczynki i chłopców połączyć w pary tak, by para się znała i pary były rozłączne.

Planarność

1. Gdy graf G jest planarny, n oznacza liczbę jego wierzchołków, m liczbę jego krawędzi, a f liczbę jego ścian licząc tę nieograniczoną, to $n - m + f = 2$.

2. Gdy graf G jest planarny, oznaczenia jak poprzednio, $n \geqslant 3$ to zachodzi $m \leqslant 3n - 6$.

3. Jeśli graf G jest planarny, to zawiera wierzchołek stopnie niewiększego niż 5.

4. Jeśli graf G jest planarny, to jego wierzchołki dadzą się pokolorować na 5 kolorów, tak, by żadne dwa połączone krawędzią wierzchołki nie były tego samego koloru.

5. *Twierdzenie o czterech barwach.* Jeśli graf G jest planarny, to jego wierzchołki dadzą się pokolorować na 4 kolorów, tak, by żadne dwa połączone krawędzią wierzchołki nie były tego samego koloru (dowód jest trudny, zrobiony dopiero w 1976 roku).

6. K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

7. *Twierdzenie Kuratowskiego.* Graf G nie jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$ lub K_5. (grafy G_1 i G_2 są homeomorficzne, jeśli można z nich uzyskać grafy izomorficzne poprzez dostawianie na krawędziach wierzchołków stopnia 2).

Zadanka

1. Jest n chłopców i n dziewczynek, każda dziewczynka zna dokładnie d chłopców i każdy chłopiec zna dokładnie d dziewczynek. Wykaż, że można tak dobrać w pary dziewczynki i chłopców, aby w każdej parze się znali (relacja znajomości jest symetryczna).

2. Mówimy, że prostokąt na pokratkowanej płaszczyźnie $n \times m, n > m$ jest łaciński, gdy wpisano w niego liczby od 1 do n tak, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie żadne dwie liczby się nie powtarzają. Wykaż, że każdy prostokąt łaciński $n \times m, n > m$ można dopełnić do kwadratu łacińskiego $n \times n$.

3. Do sejfu jest n cyfrowy kod złożony z samych zer i jedynek. Zamek działa tak, re jeżeli n ostatnio wpisanych zer i jedynek tworzy otwierającą kombinację, to sejf się otwiera. Wyznacz liczbę kliknięc w klawiaturę którą musimy wykonać, aby mieć pewność, że otworzymy sejf.

4. Na warsztatach matematycznych jest n wyłączników światła, przy czym światło zapala się tylko wtedy, gdy wszystkie wyłączniki są ustawione na zapalenie. Wyznacz ilość pojedynczych przełączeń, które będzie musiała wykonać kadra po ciszy nocnej, aby mieć pewność, że światło zostanie zgaszone (zakładamy, że kadra stosuje optymalny algorytm).

5. Dany jest zbiór liczb od 1 do $n + 1$. Mówimy, że dwie uporządkowane n-tki są ze sobą zaprzyjaźnione, gdy istnieją takie indeksy i oraz j, że na i-tym indeksie w pierwszej n-tce jest ta sama liczba, która jest na j-tym indeksie w drugiej n-tce. Wyznacz maksymalną moc zbioru n-tek, takiego, że każde dwie są ze sobą zaprzyjaźnione.

6. Wykaż, że K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.