Dowód nierówności Jensena

Nierówność Jensena. *Jeżeli f jest funkcją wypukłą w pewnym przedziale, to dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, (n \geqslant 2)$ z tego przedziału oraz liczb nieujemnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takich, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ zachodzi nierówność*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Dowód

Dowód wykonamy przez indukcję.
Dla $n = 2$ zgadza się z definicji funkcji wypukłej.
Załóżmy, że zachodzi teza dla n liczb x_i i α_i. Przeprowadzimy krok indukcyjny.
Niech liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ należą do przedziału, w którym funkcja jest wypukła, a liczby nieujemne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ spełniają warunek $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1$.
Jeśli $a_{n+1} = 1$, to

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$$

i nierówność zachodzi. Niech więc $0 < \alpha_{n+1} < 1$. Mamy:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\Big) = f\Big((1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha_{n+1}) f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}\Big) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} f(x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i).$$