Trzecie zawody indywidualne

grupa pierwszoklasistów

czwartek, 25 września 2003

51. W kwadracie $ABCD$ na boku AB obrano taki punkt P, że $2|AP| = 3|PB|$, zaś na przekątnej AC taki punkt Q, że $|AQ| = 4|QC|$. Wykazać, że kąt DQP jest prosty.

52. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z takich, że $x + y + z + 2 = xyz$, zachodzi nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12.$$

53. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$x^2 + 3y^2 = 1998x.$$

54. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| > |CA| > |AB|$. Na boku BC tego trójkąta obrano taki punkt D, a na półprostej BA taki punkt E, że $|BD| = |BE| = |AC|$. Okrąg opisany na trójkącie BED przecina bok BC w punkcie P, a prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Udowodnić, że $|AQ| + |CQ| = |BP|$.

55. W turnieju gry w Backgammon wzięli udział chłopcy i dziewczynki, przy czym każdy grał z każdym i nie zanotowano remisów. Okazało się, że każda osoba wygrała tyle razy z chłopcami, co z dziewczynkami. Wykazać, że liczba wszystkich graczy jest kwadratem liczby naturalnej.

Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

czwartek, 25 września 2003

52. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z takich, że $x + y + z + 2 = xyz$, zachodzi nierówność
$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12.$$

53. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniających równanie
$$x^2 + 3y^2 = 1998x.$$

54. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| > |CA| > |AB|$. Na boku BC tego trójkąta obrano taki punkt D, a na półprostej BA taki punkt E, że $|BD| = |BE| = |AC|$. Okrąg opisany na trójkącie BED przecina bok BC w punkcie P, a prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Udowodnić, że $|AQ| + |CQ| = |BP|$.

55. W turnieju gry w Backgammon wzięli udział chłopcy i dziewczynki, przy czym każdy grał z każdym i nie zanotowano remisów. Okazało się, że każda osoba wygrała tyle razy z chłopcami, co z dziewczynkami. Wykazać, że liczba wszystkich graczy jest kwadratem liczby naturalnej.

56. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych, stopnia większego od 1, który przyjmuje dla każdego argumentu całkowitego wartość będącą liczbą pierwszą.

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

czwartek, 25 września 2003

54. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| > |CA| > |AB|$. Na boku BC tego trójkąta obrano taki punkt D, a na półprostej BA taki punkt E, że $|BD| = |BE| = |AC|$. Okrąg opisany na trójkącie BED przecina bok BC w punkcie P, a prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Q. Udowodnić, że $|AQ| + |CQ| = |BP|$.

55. W turnieju gry w Backgammon wzięli udział chłopcy i dziewczynki, przy czym każdy grał z każdym i nie zanotowano remisów. Okazało się, że każda osoba wygrała tyle razy z chłopcami, co z dziewczynkami. Wykazać, że liczba wszystkich graczy jest kwadratem liczby naturalnej.

57. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że wielomian $Q(x) = P(x^4) \cdot P(x^3) \cdot P(x^2) \cdot P(x) + 1$ nie ma pierwiastków całkowitych.

58. Szachownica 7×7 jest podzielona na 49 kwadratów jednostkowych. Joasia ma klocki dwóch typów: bardzo dużo klocków 3×1 oraz jeden klocek trzypolowy w kształcie narożnika. Onufry ma jeden klocek w kształcie kwadratu jednostkowego. Najpierw Onufry kładzie swój klocek przykrywając jedno pole szachownicy, a następnie Joasia próbuje swoimi klockami pokryć resztę szachownicy.

(a) Wykazać, że złośliwy Onufry może tak postawić swój klocek, że Joasia nie będzie mogła pokryć szachownicy swoimi klockami.

(b) Wykazać, że jeśli damy Joasi jeszcze jeden narożnik, to Onufry już nie popsuje Joasi szyków.

59. Znaleźć zbiór możliwych wartości wyrażenia

$$f(x, y, z) = \left\{ \frac{xyz}{xy + yz + zx} \right\}$$

dla liczb całkowitych dodatnich x, y, z. Oznaczenie $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową x.

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

czwartek, 25 września 2003

58. Szachownica 7×7 jest podzielona na 49 kwadratów jednostkowych. Joasia ma klocki dwóch typów: bardzo dużo klocków 3×1 oraz jeden klocek trzypolowy w kształcie narożnika. Onufry ma jeden klocek w kształcie kwadratu jednostkowego. Najpierw Onufry kładzie swój klocek przykrywając jedno pole szachownicy, a następnie Joasia próbuje swoimi klockami pokryć resztę szachownicy.

(a) Wykazać, że złośliwy Onufry może tak postawić swój klocek, że Joasia nie będzie mogła pokryć szachownicy swoimi klockami.

(b) Wykazać, że jeśli damy Joasi jeszcze jeden narożnik, to Onufry już nie popsuje Joasi szyków.

59. Znaleźć zbiór możliwych wartości wyrażenia

$$f(x,y,z) = \left\{ \frac{xyz}{xy+yz+zx} \right\}$$

dla liczb całkowitych dodatnich x, y, z. Oznaczenie $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową x.

510. *Kwadratem magicznym* o boku n nazywamy kwadrat $n \times n$, w który wpisano liczby od 1 do n^2 tak, że suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest taka sama. W *kwadracie magicznym* o boku n środki każdych dwóch pól połączono wektorem tak, że zwrot tego wektora jest od pola z mniejszą liczbą do pola z większą liczbą. Wykazać, że suma tych wektorów jest wektorem zerowym.

511. Dla danej liczby całkowitej d definiujemy

$$S = \{m^2 + dn^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Niech liczby $p, q \in S$ będą takie, że p jest pierwsze i $p \mid q$. Udowodnić, że wówczas $\frac{q}{p} \in S$.

512. W trójkącie ABC, gdzie $AB > BC$, punkty K i M są środkami boków AB i CA, a punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Niech P będzie punktem przecięcia prostych KM i CI oraz Q będzie takim punktem, że $QP \perp KM$ i $QM \| BI$. Udowodnić, że $QI \perp AC$.