

## Teoria liczb

**1.** Znaleźć takie liczby  $a, b \in \mathbb{N}$ , aby  $a, b < 1000$  oraz liczba kroków w algorytmie Euklidesa potrzebnych do otrzymania  $NWD(a, b)$  była jak największa. Ile jest tych kroków?

**2.** Udowodnij, że:

- $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$
- $n \mid m \Rightarrow F_n \mid F_m$
- $F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$

**3.** Wykaż, że liczb pierwszych postaci  $4k + 3$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  jest nieskończenie wiele.

**4.** Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli  $p$  dzieli  $p$ -tą liczbę Grabowskiego, to  $p = 3$ .

**5.** Niech  $a, b \in \mathbb{N}$  oraz niech  $p$  będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli  $p \mid a^p - b^p$ , to  $p^2 \mid a^p - b^p$ .

**6.** Wykaż, że w ciągu Fibonacciego występuje nieskończenie wiele wyrazów kończących 2003 zerami.