Nierówności

1. Udowodnić, że dla każdych $a, b > 0$ zachodzi

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$$

2. Udowodnić, że jeśli $abc = 1$, to

$$(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geqslant 27$$

3. Udowodnić, że dla każdych $a, b, c > 0$ dla których $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ zachodzi

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

4. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b, c, d > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a + b + c + d}$$

5. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{x_i} \geqslant \frac{(2^n - 1)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

6. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left(\frac{2n + 1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} > \prod_{i=2}^{n} i^i > \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

7. Udowodnić, że jeśli $a, b, c, x, y, z > 0$, to

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a + b + c)^3}{3(x + y + z)}$$

8. Udowodnij, że jeśli $a, b, c, d > 0$ i $abcd = 4$, to

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ad}} + \frac{1}{\sqrt{bd}} + \frac{1}{\sqrt{cd}} \leqslant \frac{3}{4}(a + b + c + d)$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1$$

10. Udowodnić, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to:

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}$$

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

$$\sqrt{a}(a+c-b) + \sqrt{b}(a+b-c) + \sqrt{c}(b+c-a) \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \geqslant \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b})}{a+b+c}$$

11. Wykazać, że jeśli $a, b, p, q > 0$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ to

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$$

11. Udowodnić, że jeśli $a_i, b_i, c_i > 0$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ to

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3$$

12. Udowodnij, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 1$, to

$$\frac{ln(a^5+b^5+c^5)}{ln(a^7+b^7+c^7)} \geqslant \frac{2}{3}$$

13. Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$\sqrt[n]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \geqslant 1$$