Sprawdzian końcowy

grupa młodsza

piątek, 27 września 2002

91. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω. Proste zawierające wysokości AD, BE i CF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach A i K, B i L oraz C i M. Wyznacz możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $AMBKCL$ do pola trójkąta ABC.

92. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

93. W równoległoboku $ABCD$ punkty K, L, M i N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD oraz DA. Proste AM, BN, CK i DL ograniczają pewien równoległobok. Oblicz stosunek pola tego równoległoboku do pola równoległoboku $ABCD$.

94. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p oraz q, spełniających warunek:

$$p^q - q^p = 1.$$

95. Udowodnij, że jeżeli a, b są liczbami rzeczywistymi oraz $b \neq 0$, to wielomian

$$W(x) = x^4 + ax + b$$

nie ma czterech pierwiastków rzeczywistych.

96. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnij, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie nie większym niż 3.

Sprawdzian końcowy

grupa starsza

piątek, 27 września 2002

97. Rozstrzygnij, czy istnieją takie czworościany T_1 i T_2, że objętość czworościanu T_1 jest większa od objętości czworościanu T_2, ale pole żadnej ściany czworościanu T_1 nie przekracza pola żadnej ściany czworościanu T_2.

98. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\sum_{k=m}^{n} k\binom{k-1}{m-1} = m\binom{n+1}{m+1}.$$

99. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybrano podzbiór $(n+1)$-elementowy. Udowodnij, że w podzbiorze tym istnieją dwie różne liczby, z których jedna dzieli drugą.

910. Częścią wspólną dwóch jednakowych kwadratów jest ośmiokąt. Boki jednego z kwadratów zostały narysowane na oliwkowo, drugiego zaś na fioletowo. Udowodnij, że suma długości oliwkowych boków ośmiokąta jest równa sumie długości jego fioletowych boków.

911. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1 \quad \text{dla} \;\; x, y \in R.$$

912. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, proste AD i BC przecinają się w punkcie F, zaś przekątne AC i BD przecinają się w punkcie G. Prosta FG przecina prostą AB w punkcie H. Udowodnij, że

$$\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BE}.$$

Sprawdzian końcowy

grupa najstarsza

piątek, 27 września 2002

96. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnij, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie nie większym niż 3.

912. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, proste AD i BC przecinają się w punkcie F, zaś przekątne AC i BD przecinają się w punkcie G. Prosta FG przecina prostą AB w punkcie H. Udowodnij, że

$$\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BE}.$$

913. Dane są dwa okręgi przecinające się w punktach X i Y. Udowodnij, że istnieją cztery punkty o następującej własności: dla każdego okręgu stycznego do danych okręgów w A i B i przecinającego prostą XY w C i D każda z prostych AC, BC, AD, BD przechodzi przez jeden z tych punktów.

914. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $a, b, c \in [-1, 1]$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} a = 3c - 4c^3 \\ b = 3a - 4a^3 \\ c = 3b - 4b^3. \end{cases}$$

915. Rozstrzygnij, czy następujący układ równań ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych $a, b, c, d, e \leqslant 3$:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 39 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 57. \end{cases}$$

916. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Niech $d_1, d_2, \ldots, d_k$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n. Przyjmijmy $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.

(a) Wykaż, że $D < n^2$.

(b) Wyznacz wszystkie n, dla których n^2 dzieli się przez D.