Zadania poranne

grupa młodsza

niedziela, 22 września 2002

21. Wewnątrz trójkąta dana jest skończona liczba punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Punkty te połączono między sobą i z wierzchołkami trójkąta nieprzecinającymi się odcinkami tak, iż "duży" trójkąt podzielono na mniejsze trójkąty. Udowodnij, że liczba powstałych trójkątów jest nieparzysta.

22. Rozstrzygnij, czy istnieje ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych, niezawierający 0 ani 1 i taki że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ istnieje $a \in \mathbb{Z}^+$ dla którego a^n należy do tego ciągu.

23. Dany jest kwadrat $ABCD$ i romb $PQRS$, przy czym $A \in PQ, B \in QR, C \in RS, D \in SP$. Niech k, l, m, n będą prostymi przechodzącymi odpowiednio przez A, B, C, D i prostopadłymi odpowiednio do PQ, QR, RS, SP. Udowodnij, że pary prostych k, m i l, n są równoległe oraz odległości między nimi są równe.

24. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ obrano punkty M i K takie, że $|\measuredangle MAK| = |\measuredangle BAM|$. Udowodnij, że $BM + KD = AK$.

Zadania poranne

grupa starsza

niedziela, 22 września 2002

24. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ obrano punkty M i K takie, że $|\measuredangle MAK| = |\measuredangle BAM|$. Udowodnij, że $BM + KD = AK$.

25. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1$ w liczbach całkowitych dodatnich (x, y, z).

26. Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb całkowitych?

27. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieposiadająca punktów stałych i taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(f(f(f(f(x))))) = x$.

Zadania poranne

grupa najstarsza

niedziela, 22 września 2002

26. Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb całkowitych?

27. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieposiadająca punktów stałych i taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(f(f(f(f(x))))) = x$.

28. W trójkącie ABC punkt D, leżący na boku AB, dzieli go w stosunku $1 : 2$, tzn. tak, że $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$. Ponadto $|\angle BAC| = \frac{\pi}{4}$, zaś $|\angle BDC| = \frac{\pi}{3}$. Oblicz $|\angle ABC|$.

29. Na tablicy napisano n liczb całkowitych. Jeśli dwie z nich są równe k to można je zamienić na $k-1$ i $k+1$. Udowodnij, że nie można tego procesu kontynuować w nieskończoność.