Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

sobota, 21 września 2002

11. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zależność

$$f(x + y) = f(x^2) + f(y^2).$$

12. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność

$$a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5 \geqslant 2(a^4b + ab^4).$$

13. Udowodnij, że jeżeli liczby a i m są względnie pierwsze, to istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $m \Big| a^n - 1$.

14. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie D. W trójkąty ABD i ADC wpisano okręgi styczne do BC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnij, że $|AD| + |BC| = \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2} + |EF|$.

15. Rozważmy ciąg (a_n) określony następującymi zależnościami: $a_1 = 1$, $a_{n^2+k} = a_n + a_k$ dla $n > 0$, $0 < k \leqslant 2n + 1$. Rozstrzygnij, czy każda liczba całkowita dodatnia należy do tego ciągu.

Zadania poranne

grupa młodsza

niedziela, 22 września 2002

21. Wewnątrz trójkąta dana jest skończona liczba punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Punkty te połączono między sobą i z wierzchołkami trójkąta nieprzecinającymi się odcinkami tak, iż "duży" trójkąt podzielono na mniejsze trójkąty. Udowodnij, że liczba powstałych trójkątów jest nieparzysta.

22. Rozstrzygnij, czy istnieje ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych, niezawierający 0 ani 1 i taki że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ istnieje $a \in \mathbb{Z}^+$ dla którego a^n należy do tego ciągu.

23. Dany jest kwadrat $ABCD$ i romb $PQRS$, przy czym $A \in PQ, B \in QR, C \in RS, D \in SP$. Niech k, l, m, n będą prostymi przechodzącymi odpowiednio przez A, B, C, D i prostopadłymi odpowiednio do PQ, QR, RS, SP. Udowodnij, że pary prostych k, m i l, n są równoległe oraz odległości między nimi są równe.

24. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ obrano punkty M i K takie, że $|\measuredangle MAK| = |\measuredangle BAM|$. Udowodnij, że $BM + KD = AK$.

Drugie zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 22 września 2002

31. Na szachownicy 2001 na 2003 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Czy można je tak poprzestawiać, aby każdy pionek stał na polu sąsiadującym bokiem z polem, które zajmował i żeby wciąż na każdym polu stał dokładnie jeden pionek?

32. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

33. W trójkącie ABP zachodzi równość $AB = AP$ i kąt $\measuredangle PAB$ jest ostry. PC jest prostą prostopadłą do BP i punkt C jest po tej samej stronie BP co A. Punkt D uzupełnia równoległobok $ABCD$. Proste PC i DA przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że punkt M jest środkiem odcinka DA.

34. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem równobocznym, a P dowolnym punktem leżącym na okręgu opisanym na nim, na łuku BC niezawierającym A. Udowodnij, że $BP + CP = AP$.

35. W pewnym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wszystkich wyrazach będących liczbami całkowitymi występuje wyraz będący sześcianem liczby całkowitej. Udowodnij, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele liczb będących sześcianami liczb całkowitych.

Zawody drużynowe

grupa młodsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

42. Rozstrzygnij, czy kwadratową szachownicę o boku 2002 da się pokryć klockami o wymiarach 4×1 tak, aby żadne dwa klocki na siebie nie nachodziły i aby żaden klocek nie wystawał poza szachownicę.

43. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że 10^{100} jest dzielnikiem liczby $3^n + 1$.

44. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b oraz dodatnie liczby całkowite k, m, przy czym $k + m = n \geqslant 3$ oraz $k \leqslant 2m$ i $m \leqslant 2k$. Rozważamy ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o następujących własnościach:

(a) k wyrazów x_i jest równych a; w szczególności $x_1 = a$.

(b) m wyrazów x_i jest równych b; w szczególności $x_n = b$.

(c) Żadne trzy kolejne wyrazy ciągu x_i nie są równe.

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

45. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

46. Dana jest liczba naturalna $n > 1$ oraz liczba pierwsza p taka, że $p - 1$ dzieli się przez n, zaś $n^3 - 1$ dzieli się przez p. Udowodnij, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

47. W trójkącie ABC dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + DB = AB$. Wyznacz miarę kąta $\measuredangle ACB$.

48. W przestrzeni dany jest punkt O oraz skończony zbiór wektorów $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$. Rozważmy zbiór tych punktów P, dla których wektor $\overrightarrow{OP}$ daje się przedstawić w postaci sumy $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$, gdzie $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozstrzygnij, czy zbiór ten może być czworościanem.

49. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n i k takich, że $k < n$, zachodzi następująca równość:

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k + \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

przy czym m^k występuje ze znakiem $+$, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek, a w przeciwnym razie występuje ze znakiem $-$.

410. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, zachodzi następująca podzielność:

$$n! \Big| 2^n(2n + 1)(2n + 3) \cdot \ldots \cdot (4n - 1).$$

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa młodsza

wtorek, 24 września 2002

51. Dane są liczby całkowite dodatnie n i $k > \frac{n+1}{2}$ oraz k-elementowy zbiór liczb całkowitych dodatnich nie większych niż n. Udowodnij, że można z tego zbioru wybrać takie trzy niekoniecznie różne liczby x, y, z, że $x + y = z$.

52. Dany jest okrąg O oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu O.

53. Udowodnij, że prostokąt o wymiarach $a \times b$ można pokryć prostokątami o wymiarach $n \times 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|a$ lub $n|b$.

54. Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i $|W(3)| = |W(7)| = 1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

środa, 25 września 2002

61. Okręgi S i T przecinają się w punktach M i N. Niech k będzie wspólną styczną tych dwóch okręgów, przy czym punkt M leży bliżej prostej k niż punkt N. P i Q są punktami styczności prostej k odpowiednio z okręgami S i T. Prosta PN przecina okrąg T w punktach N i R. Udowodnij, że dwusieczna kąta $\measuredangle PMR$ jest zawarta w prostej MQ.

62. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

63. W pewnym państwie istnieje n miast i każde dwa łączy droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego da się dojechać do każdego innego (niekoniecznie bezpośrednio).

64. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_7$ będą liczbami całkowitymi, zaś $b_1, b_2, \ldots, b_7$ pewną ich permutacją (tymi samymi liczbami ustawionymi niekoniecznie w tej samej kolejności). Udowodnij, że $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_6 - b_6)(a_7 - b_7)$ jest liczbą parzystą.

65. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n), że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k ciąg (b_n) zdefiniowany następująco: $b_n = k + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zawiera skończoną liczbę wyrazów będących liczbami pierwszymi.

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa młodsza

środa, 25 września 2002

71. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geqslant 3ab^2 - 4.$$

72. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

73. Za siedmioma górami, za siedmioma rzekami, w czasach, kiedy Ziemia była jeszcze płaszczyzną, żyli sobie dwaj druidzi. Zbudowali oni swoje domki specjalnie w miejscach koncentracji energii magicznej – jeden w punkcie A, drugi w punkcie C. Wkrótce odkryli oni w okolicy dwa inne ośrodki energii magicznej, w których to wznieśli obeliski (są to punkty B i D). Trzy miejsca koncetracji energii nie mogą być współliniowe. Druidzi szybko zauważyli, że jeśli umówią się pod obeliskiem B i wyjdą z domków o tej samej porze, dotrą tam jednocześnie. Tak samo jest z obeliskiem D (druidzi chodzą zawsze ze stałą prędkością, aczkolwiek każdy może chodzić z inną). Pewnego dnia druidzi obrazili swojego boga Manitulualoa i aby go przebłagać muszą wznieść trzeci obelisk w punkcie E na prostej AC tak, aby BE było dwusieczną $\measuredangle ABC$ i DE było dwusieczną $\measuredangle ADC$. Udowodnij, że druidzi mogą przebłagać swojego boga.

Mecz Matematyczny

grupa młodsza i starsza

czwartek, 26 września 2002

81. W trójkącie ABC prosta k jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B. Okrąg styczny do prostej k w punkcie B i przechodzący przez wierzchołek C przecina bok AB w punkcie D. Punkt E leży na półprostej $\overrightarrow{CD}$ i spełnia równanie $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AD}$. Udowodnij, że jeżeli okrąg opisany na $\triangle BDE$ jest styczny do BC, to $|\measuredangle ACB| = 2|\measuredangle CAB|$.

82. Dany jest okrąg O, punkt A leżący na tym okręgu i punkt I leżący wewnątrz okręgu O. Skonstruuj trójkąt wpisany w okrąg O o wierzchołku w A, którego środek okręgu wpisanego leży w I.

83. Świat ma kształt sfery. Onufry, spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. Z ilu co najmniej punktów Onufry musi spojrzeć na świat, aby cały uszczęśliwić?

84. W danym czworościanie prowadzimy w następujący sposób sześć płaszczyzn: wybieramy jedną z sześciu krawędzi i prowadzimy płaszczyznę przechodzącą przez jej środek i prostopadłą do naprzeciwległej krawędzi. Udowodnij, że te płaszczyzny mają punkt wspólny.

85. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{x_i} \geqslant \frac{(2^n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

86. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi $a[bn] = b[an]$.

87. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n > 3$ liczba n^2 ma w zapisie dziesiętnym przynajmniej jedną cyfrę parzystą.

88. Gracze A i B grają na szachownicy $(2n+1) \times (2n+1)$ w następującą grę: na początku jeden z rogów planszy jest pokolorowany na czarno, zaś naprzeciwległy na biało. W swoim ruchu A koloruje na czarno jedno z pól planszy, które dotychczas było niepokolorowane, a które sąsiadowało bokiem z jakimś czarnym polem. Analogicznie gracz B w swoim ruchu koloruje na biało pewnego sąsiada białego pola. W momencie, w którym jeden z graczy nie może wykonać ruchu, drugi wykonuje wszystkie dostępne mu ruchy i gra się kończy. Każdy dąży do tego, by pod koniec gry mieć jak najwięcej pól swojego koloru na planszy. Jaki będzie wynik gry, jeżeli obydwaj gracze nie popełniają żadnych błędów?

89. Niech k i $n > 6$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $\frac{1}{2}n < k < \frac{2}{3}n$. Wyznacz minimalną liczbę pól, którą należy usunąć z szachownicy $n \times n$ tak, aby nie dało się na niej położyć klocka $k \times 1$.

810. Na okręgu napisano 50 liczb należących do zbioru $\{-1, 1\}$. Możemy zadać pytanie o iloczyn trzech sąsiednich liczb. Ile minimalnie razy musimy się zapytać, aby poznać iloczyn wszystkich liczb?

811. Rozważmy nieskończoną szachownicę, na której na każdym polu napisano liczbę rzeczywistą. *Tetrisem* nazwijmy klocek składający się ze skończonego podzbioru pól (niekoniecznie spójny). Tetrisa możemy kłaść w dowolny sposób na szachownicę tak, aby boki tetrisa pokrywały się z bokami pól na szachownicy, możemy również go obracać. Mamy dane dwa różne tetrisy. Jakkolwiek byśmy nie położyli na szachownicy pierwszego tetrisa, suma liczb w polach, które on pokryje, będzie nieujemna. Udowodnij, że możemy tak położyć drugiego tetrisa, aby suma liczb w polach, które on przykrył, była nieujemna.

Sprawdzian końcowy

grupa młodsza

piątek, 27 września 2002

91. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω. Proste zawierające wysokości AD, BE i CF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach A i K, B i L oraz C i M. Wyznacz możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $AMBKCL$ do pola trójkąta ABC.

92. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

93. W równoległoboku $ABCD$ punkty K, L, M i N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD oraz DA. Proste AM, BN, CK i DL ograniczają pewien równoległobok. Oblicz stosunek pola tego równoległoboku do pola równoległoboku $ABCD$.

94. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p oraz q, spełniających warunek:

$$p^q - q^p = 1.$$

95. Udowodnij, że jeżeli a, b są liczbami rzeczywistymi oraz $b \neq 0$, to wielomian

$$W(x) = x^4 + ax + b$$

nie ma czterech pierwiastków rzeczywistych.

96. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnij, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie nie większym niż 3.