Zawody drużynowe

grupa młodsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

42. Rozstrzygnij, czy kwadratową szachownicę o boku 2002 da się pokryć klockami o wymiarach 4×1 tak, aby żadne dwa klocki na siebie nie nachodziły i aby żaden klocek nie wystawał poza szachownicę.

43. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że 10^{100} jest dzielnikiem liczby $3^n + 1$.

44. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b oraz dodatnie liczby całkowite k, m, przy czym $k + m = n \geqslant 3$ oraz $k \leqslant 2m$ i $m \leqslant 2k$. Rozważamy ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o następujących własnościach:

(a) k wyrazów x_i jest równych a; w szczególności $x_1 = a$.

(b) m wyrazów x_i jest równych b; w szczególności $x_n = b$.

(c) Żadne trzy kolejne wyrazy ciągu x_i nie są równe.

Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

45. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

46. Dana jest liczba naturalna $n > 1$ oraz liczba pierwsza p taka, że $p - 1$ dzieli się przez n, zaś $n^3 - 1$ dzieli się przez p. Udowodnij, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

47. W trójkącie ABC dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + DB = AB$. Wyznacz miarę kąta $\measuredangle ACB$.

48. W przestrzeni dany jest punkt O oraz skończony zbiór wektorów $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$. Rozważmy zbiór tych punktów P, dla których wektor $\overrightarrow{OP}$ daje się przedstawić w postaci sumy $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$, gdzie $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozstrzygnij, czy zbiór ten może być czworościanem.

49. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n i k takich, że $k < n$, zachodzi następująca równość:

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k + \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

przy czym m^k występuje ze znakiem $+$, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek, a w przeciwnym razie występuje ze znakiem $-$.

410. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, zachodzi następująca podzielność:

$$n! \,\Big|\, 2^n (2n + 1)(2n + 3) \cdot \ldots \cdot (4n - 1).$$

Zawody drużynowe

grupa starsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

47. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + DB = AB$. Wyznacz miarę kąta $\measuredangle ACB$.

48. W przestrzeni dany jest punkt O oraz skończony zbiór wektorów $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$. Rozważmy zbiór tych punktów P, dla których wektor $\overrightarrow{OP}$ daje się przedstawić w postaci sumy $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$, gdzie $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozstrzygnij, czy zbiór ten może być czworościanem.

49. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n i k takich, że $k < n$, zachodzi następująca równość:

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k + \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

przy czym m^k występuje ze znakiem $+$, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek, a w przeciwnym razie występuje ze znakiem $-$.

410. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ zachodzi następująca podzielność:

$$n! \Big| 2^n(2n+1)(2n+3) \cdot \ldots \cdot (4n-1).$$

411. W trójkącie ABC zachodzi równość $2 \cdot AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące punkty: środek okręgu wpisanego, środek okręgu opisanego i środki boków AC i BC leżą na jednym okręgu.

412. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $m \leqslant n$. Niech zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniającym następujący warunek: jeśli dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ zachodzi $a_i + a_j \leqslant n$, to $a_i + a_j \in A$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

413. Dana jest liczba naturalna $n_0 > 1$. Gracze A i B wybierają na przemian liczby $n_1, n_2, \ldots$ według następujących reguł: gracz A, znając liczbę n_{2k}, może wybrać dowolną liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+1} taką, że $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$. Gracz B, znając liczbę n_{2k+1}, wybiera taką liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+2}, że $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym nieujemnym. Gracz A zwycięża, jeśli wybierze liczbę 1990, gracz B – jeśli wybierze liczbę 1. Dla jakich n_0 gracz A ma strategię wygrywającą, dla jakich ma ją gracz B, a kiedy żaden z nich nie ma strategii wygrywającej?

414. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nie mniejszych niż 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \ldots + \frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n} + 1}.$$

415. Dana jest pewna permutacja cyfr $1, 2, \ldots, 9$. Ruch polega na wzięciu monotonicznego spójnego podciągu tej permutacji i odwróceniu go (np. z 9<u>2456</u>1387 na 9<u>6542</u>1387). Udowodnij, że da się w co najwyżej 12 ruchach doprowadzić tę permutację do permutacji monotonicznej.

Zawody drużynowe

grupa najstarsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

411. W trójkącie ABC zachodzi równość $2 \cdot AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące punkty: środek okręgu wpisanego, środek okręgu opisanego i środki boków AC i BC leżą na jednym okręgu.

412. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $m \leqslant n$. Niech zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniającym następujący warunek: jeśli dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ zachodzi $a_i + a_j \leqslant n$, to $a_i + a_j \in A$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

413. Dana jest liczba naturalna $n_0 > 1$. Gracze A i B wybierają na przemian liczby $n_1, n_2, \ldots$ według następujących reguł: gracz A, znając liczbę n_{2k}, może wybrać dowolną liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+1} taką, że $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$. Gracz B, znając liczbę n_{2k+1}, wybiera taką liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+2}, że $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym nieujemnym. Gracz A zwycięża, jeśli wybierze liczbę 1990, gracz B – jeśli wybierze liczbę 1. Dla jakich n_0 gracz A ma strategię wygrywającą, dla jakich ma ją gracz B, a kiedy żaden z nich nie ma strategii wygrywającej?

414. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nie mniejszych niż 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \ldots + \frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n} + 1}.$$

415. Dana jest pewna permutacja cyfr $1, 2, \ldots, 9$. Ruch polega na wzięciu monotonicznego spójnego podciągu tej permutacji i odwróceniu go (np. z $9\underline{2456}1387$ na $9\underline{6542}1387$). Udowodnij, że da się w co najwyżej 12 ruchach doprowadzić tę permutację do permutacji monotonicznej.

416. Niech m, n, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi, spełniającymi warunki: $m > n$ i $b > 1$. Udowodnij, że jeśli $b^m - 1$ i $b^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to $b + 1$ jest potęgą dwójki.

417. Definiujemy rekurencyjnie ciąg liczb całkowitych nieujemnych w następujący sposób: $a_0 = 1, a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = 3a_n$ i $a_{2n+1} = 3a_n + 1$ dla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(a) Scharakteryzuj wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) liczb całkowitych nieujemnych, spełniająca warunki $k \geqslant l$ i $a_k + a_l = n$.

(b) Dla każdego n niech $f(n)$ będzie liczbą par (k, l), spełniających warunki podane w punkcie (a). Oblicz, jaką największą wartość przyjmuje $f(n)$ dla $n < 3^{1998}$.

418. Niech D będzie punktem wewnętrznym boku BC trójkąta ABC. Prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie X. Niech P i Q będą rzutami X na proste AB i AC odpowiednio. Udowodnij, że prosta PQ jest styczna do okręgu o średnicy XD wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.

419. W wypukłym sześciokącie $ABCDEF$ zachodzą równości $AB = BC = CD$ i $DE = EF = FA$. Ponadto $|\angle BCD| = |\angle EFA| = \frac{\pi}{3}$. Punkty G i H we wnętrzu wielokąta spełniają warunki $|\angle AGB| = |\angle DHE| = \frac{2\pi}{3}$. Udowodnij, że $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.