Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

czwartek, 27 września 2001

61. Liczby $a_1, \ldots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \ldots, b_5$ to pewna ich permutacja. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \ldots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.

62. Punkty P i Q są środkami przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego, przy czym $|PQ| = 1$. Oblicz objętość tego czworościanu.

63. Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Wykaż, że pola, na które te proste dzielą płaszczyznę, można pomalować dwoma kolorami w taki sposób, by żadne dwie figury sąsiadujące ze sobą wzdłuż odcinka (albo półprostej lub prostej) nie były pomalowane tym samym kolorem.

64. W trapezie $ABCD$ boki AB oraz CD są równoległe, proste zawierające boki AD i BC przecinają się w punkcie O, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków CD i AB. Udowodnij, że punkty O, M, E, N są współliniowe.

65. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 5, to $p \mid 5^p - 2 \cdot 3^p + 1$.

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

czwartek, 27 września 2001

61. Liczby $a_1, \ldots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \ldots, b_5$ to pewna ich permutacja. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \ldots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.

63. Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Wykaż, że pola, na które te proste dzielą płaszczyznę, można pomalować dwoma kolorami w taki sposób, by żadne dwie figury sąsiadujące ze sobą wzdłuż odcinka (albo półprostej lub prostej) nie były pomalowane tym samym kolorem.

64. W trapezie $ABCD$ boki AB oraz CD są równoległe, proste zawierające boki AD i BC przecinają się w punkcie O, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków CD i AB. Udowodnij, że punkty O, M, E, N są współliniowe.

65. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 5, to $p \mid 5^p - 2 \cdot 3^p + 1$.

66. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

67. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n \mid 2^{n!} - 1$.

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

czwartek, 27 września 2001

66. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

67. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n \mid 2^{n!} - 1$.

62. Punkty P i Q są środkami przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego, przy czym $|PQ| = 1$. Oblicz objętość tego czworościanu.

69. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą. Bierzemy zbiór $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ punktów na płaszczyźnie takich, że żadne trzy nie leżą na jednej prostej i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Niech a_l będzie liczbą kół $P_iP_jP_k$, które zawierają P_l i niech $m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wyznacz $f(n)$ takie, że S to zbiór wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy $m(S) = f(n)$.

610. Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, który dla różnych liczb całkowitych a, b, c spełnia równania: $W(a) = b, W(b) = c, W(c) = a$.