Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 23 września 2001

11. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a + b + c \leqslant \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

12. Wykaż, że liczby naturalne n, m są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $2^n - 1,\ 2^m - 1$ są względnie pierwsze.

13. Niech a będzie liczbą całkowitą, n – liczbą naturalną > 1. Wykaż, że liczba $\sqrt[n]{a}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita.

14. Na bokach trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$.

a) Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

b) Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P.

c) Wykaż, że $|AP| + |BP| + |CP| \leqslant |AR| + |BR| + |CR|$ dla każdego punktu R.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 23 września 2001

13. Niech a będzie liczbą całkowitą, n – liczbą naturalną > 1. Wykaż, że liczba $\sqrt[n]{a}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita.

14. Na bokach trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$.

a) Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

b) Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P.

c) Wykaż, że $|AP| + |BP| + |CP| \leqslant |AR| + |BR| + |CR|$ dla każdego punktu R.

15. Dana jest funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla której $f(n+1) > f(f(n))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego n.

16. Rozważamy wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru $1, \ldots, n$ $\ (r \in \mathbb{N}, 1 \leqslant r \leqslant n)$. W każdym z nich wybieramy liczbę najmniejszą. Udowodnić, że średnia arytmetyczna tych liczb jest równa $\frac{n+1}{r+1}$.