Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa najstarsza

wtorek, 25 września 2001

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

37. Udowodnij, że dowolną liczbę wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych, tzn. ułamków nieskracalnych o mianownikach będących potęgami liczb pierwszych.

38. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów mających obie współrzędne całkowite. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej ℓ równoległej do którejkolwiek osi układu współrzędnych wartość bezwzględna różnicy między liczbą punktów białych i czerwonych na prostej ℓ jest nie większa od 1 ?

39. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg S_1. Styczna do okręgu S_1 w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg S_2 jest styczny do prostej BC w punkcie D i przechodzi przez punkt A. Punkt E jest drugim (oprócz A) punktem przecięcia okręgów S_1 i S_2. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

310. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m istnieje taki skończony zbiór S punktów płaszczyzny, że dla dowolnego punktu $A \in S$ istnieje w zbiorze S dokładnie m punktów odległych o 1 od A.

Zadania powtórzeniowe i nie tylko

grupa najstarsza

środa, 26 września 2001

411. Niech H będzie ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$, a punkty O_1, O_2, O_3 – środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$. Wykaż, że proste AO_1, BO_2, CO_3 przecinają się w jednym punkcie.

414. W pewnym głosowaniu "Samoobrona" otrzymała p głosów, a "Liga Polskich Rodzin" q głosów, przy czym $p > q$. Oblicz prawdopodobieństwa, iż w trakcie obliczania głosów było cały czas:
(a) więcej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin";
(b) nie mniej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin".

415. Dany jest trójkąt ABC. W kąty przy wierzchołkach A i B wpisz dwa przystające, zewnętrznie styczne okręgi.

416. Ciągi a_n i b_n zadane są następującymi wzorami: $a_1 = \sqrt{2}$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{-\sqrt{4-(a_n)^2}+2}$, $b_{n+1} = \frac{2\sqrt{4+(b_n)^2}-4}{b_n}$. Udowodnij, że istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $|a_n - b_n| < c \cdot 8^{-n}$.

417. Trójkąt równoboczny podzielono na 9 000 000 przystających trójkątów równobocznych prostymi równoległymi do jego boków. Każdy wierzchołek każdego małego trójkąta pokolorowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją trzy punkty tego samego koloru, które są wierzchołkami trójkąta o bokach równoległych do boków pierwotnego trójkąta.

Pierwsze zawody drużynowe

grupa najstarsza

środa, 26 września 2001

512. Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.

513. Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Udowodnij, że można na tym obszarze wykopać 100 studni tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału).

514. Na stole bilardowym w kształcie trójkąta, którego miary kątów są współmierne pchnięto kulę z pewnego punktu wewnętrznego. Kula odbija się od ścian zgodnie z prawem "kąt padania równy kątowi odbicia". Udowodnij, że liczba kierunków w jakich może się poruszać kula jest skończona (zakładamy, że kula nie trafia w wierzchołek trójkąta). Siłę tarcia oraz wymiary kuli pomijamy.

515. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2, k liczbą naturalną taką, że $0 < k < p-1$. Udowodnij, że liczba

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k$$

dzieli się przez p.

516. Punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty C i D. Skonstruuj taki punkt M leżący na prostej CD, że kąt $\angle AMC$ jest dwa razy większy od kąta $\angle BMD$.

517. Okrąg S jest styczny do ramion kąta o wierzchołku A w punktach B i C. Na półprostej $AB^{\rightarrow}$ obieramy poza odcinkiem AB dowolny punkt D. Niech P będzie punktem przecięcia okręgu S z okręgiem opisanym na $\triangle ACD$ różnym od C, zaś punkt Q rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD. Udowodnij, że $|\angle DPQ| = 2 \cdot |\angle ADC|$.

518. Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna n da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ k-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$.

519. Dane są liczby naturalne k, n takie, że $0 < k < \frac{n^2}{4}$ oraz k nie ma dzielnika pierwszego większego niż n. Udowodnij, że $k|n!$.

520. Ciąg (a_n) zadany jest następującymi wzorami: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{-\sqrt{4-(a_n)^2}+2}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$

521. Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x_1 określamy ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ przyjmując $x_{n+1} = x_n(x_n + (1/n))$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna wartość x_1 taka, że nierówności $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ zachodzą dla każdego n.

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

czwartek, 27 września 2001

66. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

67. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n \mid 2^{n!} - 1$.

62. Punkty P i Q są środkami przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego, przy czym $|PQ| = 1$. Oblicz objętość tego czworościanu.

69. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą. Bierzemy zbiór $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ punktów na płaszczyźnie takich, że żadne trzy nie leżą na jednej prostej i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Niech a_l będzie liczbą kół $P_iP_jP_k$, które zawierają P_l i niech $m(S) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wyznacz $f(n)$ takie, że S to zbiór wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy $m(S) = f(n)$.

610. Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, który dla różnych liczb całkowitych a, b, c spełnia równania: $W(a) = b, W(b) = c, W(c) = a$.

Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa najstarsza

czwartek, 27 września 2001

77. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą odpowiednio na prostych AC i AB, przy czym proste BE i CF przecinają się na wysokości AD. Wykaż, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF$.

78. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, dla których $abcd = 2001$, zachodzi nierówność:

$$3\left(\frac{a^2b^2c^2}{d} + \frac{a^2b^2d^2}{c} + \frac{a^2c^2d^2}{b} + \frac{b^2c^2d^2}{a}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2b^2d + a^2bd^2 + ab^2d^2 + a^2c^2d + a^2cd^2 + ac^2d^2 + b^2c^2d + b^2cd^2 + bc^2d^2.$$

79. Dany jest zbiór S złożony z n elementów. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą niepustymi podbiorami zbioru S. Wykaż, że istnieją takie dwa różne niepuste podzbiory A i B zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, że

$$\bigcup_{k \in A} M_k = \bigcup_{k \in B} M_k.$$

710. Punkt R jest środkiem łuku AB okręgu opisanego na $\triangle ASB$, który zawiera punkt S. Punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ASB$, Q jest punktem styczności okręgu wpisanego w $\triangle ASB$ z bokiem AB, a P punktem przecięcia prostej DR z okręgiem opisanym na $\triangle ASB$, różnym od R. Wykaż, że $\measuredangle APQ = \measuredangle SAB$.

711. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają następujące warunki: $a+b+c+d = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$, $abcd = 1$. Udowodnij, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

712. Oblicz sumę $x^4 + y^4 + z^4$ wiedząc, że $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią.

Drugie zawody drużynowe

grupa najstarsza

piątek, 28 września 2001

89. Udowodnij, że jeśli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \leqslant \frac{3}{4}.$$

814. Dane jest $n > 2$ punktów na płaszczyźnie. d to największa odległość między dwoma spośród tych punktów. Udowodnij, że wśród nich istnieje najwyżej n par punktów odległych o d.

815. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ oraz: $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n > 0$. Ile jest liczb całkowitych n spełniających warunki $0 < n \leqslant 1988$ oraz $f(n) = n$?

816. Zbuduj okrąg przechodzący przez dany punkt oraz styczny do danej prostej i do danego okręgu.

819. *Prostokąt łaciński* $m \times n$ $(m \leqslant n)$ to m wierszy po n liczb ustawionych tak, że każdy wiersz to pewna permutacja liczb od 1 do n oraz w każdej kolumnie liczby są parami różne. Wykaż, że dowolny prostokąt łaciński $m \times n$, $m < n$ można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego $n \times n$.

820. O jest środkiem okręgu o promieniu r, wpisanego w trójkąt ABC, promień okręgu opisanego na tym trójkącie równy jest R. Udowodnij, że dla każdej prostej k przechodzącej przez punkt O, która przecina okrąg opisany w punktach A' i B', zachodzi równość: $A'O \cdot BO' = 2Rr$.

822. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

824. Udowodnij, że liczba $\frac{5^{10005}(2001!)^{10000}-1}{5^{2001}(2001!)^{2000}-1}$ jest złożona.

825. Danych jest n kartoników, każdy z jednej strony pomalowany na czerwono, a z drugiej na niebiesko. Kartoniki te rozkładamy dowolnie na okręgu. Jeden ruch polega na odwróceniu dowolnych trzech leżących obok siebie kartoników na drugą stronę. Wyznacz wszystkie takie wartości n, dla których z dowolnego początkowego układu kolorów da się dojść do każdego innego.

826. Wykaż, że wielomian $(x+1)^n + x^n + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą niepodzielną przez 3.

827. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz okrąg S opisany na nim. Punkt P leży na tym łuku AB, na którym nie leży punkt C. O_1 i O_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $\triangle APC$ i $\triangle BPC$. Wykaż, że istnieje punkt T, przez który, niezależnie od położenia punktu P, przechodzi okrąg opisany na trójkącie O_1O_2P.

Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa najstarsza

sobota, 29 września 2001

911. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ równość
$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

913. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Dany jest zbiór B oraz jego podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Zakładamy, że:

(i) do każdego zbioru A_i należy dokładnie $2n$ elementów;

(ii) do każdego zbioru $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n + 1)$ należy dokładnie jeden element;

(iii) każdy element zbioru B należy do co najmniej dwóch zbiorów A_i.

Dla jakich wartości n można przyporządkować każdemu elementowi zbioru B jedną z liczb 0, 1 tak, aby w każdym ze zbiorów A_i liczba 0 była przyporządkowana dokładnie n jego elementom?

915. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, \ldots, x_k$ oraz dowolnych rzeczywistych $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$, $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k$ spełniających $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ zachodzi następująca nierówność:
$$\sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \geqslant \sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\beta_k}.$$

916. Punkt D jest rzutem punktu P należącego do wnętrza trójkąta ABC na bok BC i należy do jego wnętrza. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i AB trójkąta ABC. Wykaż, że jeśli proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie oraz $\measuredangle EDF = 90^\circ$, to $\measuredangle PDE = \measuredangle FDA$.

917. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi o_1, o_2 i punkt A leżący na zewnątrz tych okręgów. Skonstruuj taki okrąg o, aby jego punkty styczności z o_1 i o_2 oraz punkt A były współliniowe.

918. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $p \geqslant 2$ będą liczbami rzeczywistymi, zaś Υ zbiorem wszystkich funkcji $\epsilon : \{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$. Ponadto niech dla każdego $\epsilon \in \Upsilon$ sumy $\epsilon(1)a_1 + \epsilon(2)a_2 + \ldots + \epsilon(n)a_n$ będą różne od 0. Udowodnij nierówność
$$\sum_{\epsilon \in \Upsilon} |\epsilon(1)a_1 + \epsilon(2)a_2 + \ldots + \epsilon(n)a_n|^p \geqslant 2^n (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{p}{2}}.$$

919. Dana jest prosta k oraz rozłączne zewnętrznie okręgi O_1, O_2 leżące po tej samej stronie prostej k. Skonstruuj okrąg styczny do k, O_1, O_2.

920. Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.