Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 23 września 2001

11. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a+b+c \leqslant \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}.$$

12. Wykaż, że liczby naturalne n, m są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $2^n-1,\ 2^m-1$ są względnie pierwsze.

13. Niech a będzie liczbą całkowitą, n – liczbą naturalną > 1. Wykaż, że liczba $\sqrt[n]{a}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita.

14. Na bokach trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$.

a) Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

b) Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P.

c) Wykaż, że $|AP|+|BP|+|CP| \leqslant |AR|+|BR|+|CR|$ dla każdego punktu R.

Drugie zawody indywidualne - dzień pierwszy

grupa młodsza

poniedziałek, 24 września 2001

21. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x+y=xy$.

22. Dana jest kwadratowa szachownica o k^2 polach. Na narożnym polu tej szachownicy stoi wieża. Wykaż, że jeśli ta wieża może przejść ze swojego rogu do rogu przeciwległego, przechodząc przez każde pole szachownicy dokładnie raz, to k jest liczbą nieparzystą.

23. Dana jest liczba rzeczywista a. Udowodnij, że jeżeli liczba $a+\frac{1}{a}$ jest całkowita, to dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $a^n+\frac{1}{a^n}$ jest całkowita.

24. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ i $\sqrt{26}$.

25. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ tworzą równoległobok.

26. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych $0 \leqslant a \leqslant 1$ i $0 \leqslant b \leqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$(a+b+1)^2 \geqslant 4\cdot(a^{2001}+b^{2001}).$$

Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa młodsza

wtorek, 25 września 2001

31. Niech x będzie 2001-cyfrową liczbą naturalną podzielną przez 9, a – sumą cyfr x, b – sumą cyfr a, c – sumą cyfr b. Oblicz c.

32. Dana jest szachownica 8 x 8. Czy da się na niej ustawić pewną liczbę pionków tak, aby na każdej z 30 przekątnych stała nieparzysta ich liczba?

33. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D, odcinek DE jest średnicą tego okręgu. Prosta BE przecina bok AC w punkcie F. Wykazać, że $AF = CD$.

34. Udowodnij, że dla liczb całkowitych $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\ 2^{n-2}.$$

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

Pierwsza łatwa seria powtórzeniowa

grupa młodsza

środa, 26 września 2001

41. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

42. Udowodnij, że

$$2^k\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

43. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, $n \geqslant 2$. Udowodnij, że $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

44. Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole uczestników warsztatów (33 osoby) tak, żeby Marcin Pilipczuk nie siedział obok Wojtka Czerwińskiego?

Uwaga: Utożsamiamy obroty stołu.

45. Mamy 4 kawałki papieru. Jeden z nich rozdzieramy na 4 części, otrzymując w sumie 7 kawałków, następnie jeden z tych 7 znów rozdzieramy na 4 i tak dalej. Czy możemy w ten sposób otrzymać 2001 kawałków papieru?

46. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $8p^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

47. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^{q-1} + q^{p-1}$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez pq.

48. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa okręgi O_1 i O_2 styczne zewnętrznie w punkcie T, styczne do boku BC oraz takie, że O_1 jest styczny do boku AC i O_2 jest styczny do boku AB. Prosta BT przecina okrąg O wpisany w trójkąt ABC w punktach P_1 i P_2, przy czym P_1 należy do odcinka BP_2. Prosta CT przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach Q_1 i Q_2, przy czym Q_1 należy do odcinka CQ_2. Wykaż, że P_2Q_2 jest średnicą okręgu O.

49. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a. Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a, by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB, a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA.

Pierwsze zawody drużynowe

grupa młodsza

środa, 26 września 2001

51. Czy istnieje trójkąt nieprostokątny, który można podzielić na 5 trójkątów podobnych do niego?

52. Niech n, k będą liczbami całkowitymi dodatnimi, $n \geqslant k$. Na ile sposobów można k różnym osobom rozdać n identycznych ciasteczek tak, by każdy dostał co najmniej jedno ciasteczko?

53. W trójkącie o bokach a, b, c długości środkowych opuszczonych odpowiednio na te boki oznaczmy przez m_a, m_b, m_c. Udowodnij, że $m_b\ c + m_c\ b \geqslant 2\ m_a\ a$.

54. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg S_1. Styczna do okręgu S_1 w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg S_2 jest styczny do prostej BC w punkcie D i przechodzi przez punkt A. Punkt E jest drugim (oprócz A) punktem przecięcia okręgów S_1 i S_2. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

55. W klasie siedzi 33 uczniów. Co minutę dwoje z nich zamienia się miejscami. Czy jest możliwe, aby pod koniec lekcji (po 45 zamianach) każdy siedział na tym samym miejscu, co na początku?

56. Podziel kwadrat na 8 trójkątów ostrokątnych.

57. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geqslant \sqrt{6(x+y+z)}.$$

58. Niech k, n będą ustalonymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Oblicz

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

59. Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna n da się przedstawić jako suma wziętych z + lub $-$ k-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3)$.

511. Rozpatrujemy rozkłady szachownicy 8×8 na p nie zachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:

(a) Każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych.

(b) Jeżeli a_i jest liczbą pól w i-tym prostokącie, to $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Znajdź największą wartość p, przy której jest możliwy taki rozkład i wyznacz dla tej wartości p wszystkie ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_p$, dla których można taki rozkład zrealizować.

Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

czwartek, 27 września 2001

61. Liczby $a_1, \ldots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \ldots, b_5$ to pewna ich permutacja. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \ldots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.

62. Punkty P i Q są środkami przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego, przy czym $|PQ| = 1$. Oblicz objętość tego czworościanu.

63. Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Wykaż, że pola, na które te proste dzielą płaszczyznę, można pomalować dwoma kolorami w taki sposób, by żadne dwie figury sąsiadujące ze sobą wzdłuż odcinka (albo półprostej lub prostej) nie były pomalowane tym samym kolorem.

64. W trapezie $ABCD$ boki AB oraz CD są równoległe, proste zawierające boki AD i BC przecinają się w punkcie O, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków CD i AB. Udowodnij, że punkty O, M, E, N są współliniowe.

65. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 5, to $p \mid 5^p - 2 \cdot 3^p + 1$.

Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa młodsza

czwartek, 27 września 2001

71. Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami n różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

72. Udowodnij, że w danym ciągu n-wyrazowym złożonym z liczb całkowitych istnieje pewna liczba jego kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n.

73. Okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

74. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA i AB trójkąta ABC; proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie. Punkty P_1, Q_1, R_1 są obrazami odpowiednio punktów P, Q, R w symetriach względem środków tych boków trójkąta ABC, do których należą. Wykaż, że proste AP_1, BQ_1, CR_1 przecinają się w jednym punkcie.

75. Wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że nie jest możliwe, by $W(7) = 11$ i jednocześnie $W(11) = 13$.

711. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają następujące warunki: $a + b + c + d = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$, $abcd = 1$. Udowodnij, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

Drugie zawody drużynowe

grupa młodsza

piątek, 28 września 2001

81. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej napisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnij, że po skończonej liczbie takich ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

82. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje taka jej wielokrotność, która w zapisie dziesiętnym składa się z samych zer i jedynek.

83. Czy równanie $a^2 - 5b^2 = 3$ ma rozwiązania w liczbach całkowitych a, b?

84. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum $\triangle EBC$, punkt G jest ortocentrum $\triangle EAD$. Udowodnij, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

85. Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna n da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ k-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k, \ x_i \in \mathbb{Z}.$$

Udowodnij, że $v(3) \leqslant 5$.

86. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

87. Udowodnij, że dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$

$$a + b + c + d \leqslant \frac{abc}{d^2} + \frac{bcd}{a^2} + \frac{cda}{b^2} + \frac{dab}{c^2}.$$

88. Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie D. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do k, punkt C należy do k. Odcinki AC i BC przecinają okrąg O odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD.

89. Udowodnij, że jeśli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \leqslant \frac{3}{4}.$$

810. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geqslant \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

811. Udowodnij, że iloczyn liczb, z których każda jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych, również jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

812. Niektóre ściany wypukłego wielościanu pomalowano na czerwono, resztę na biało w taki sposób, że żadne dwie ściany tego samego koloru nie mają wspólnej krawędzi. Udowodnij, że jeśli suma pól ścian czerwonych jest różna od sumy pól ścian białych, to w ten wielościan nie da się wpisać sfery.

Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa młodsza

sobota, 29 września 2001

91. Punkty D, E, F sa środkami odpowiednio boków BC, AC i AB trójkąta ABC. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w $\triangle DEF$, środek ciężkości $\triangle ABC$ i punkt przecięcia się dwusiecznych $\triangle ABC$ leżą na jednej prostej.

92. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

93. Proste k i l, przechodzące przez wierzchołki odpowiednio B i C trójkąta ABC, przecinają się na wysokości AD. Prosta k przecina bok AC w punkcie E, prosta l przecina bok AB w punkcie F. Prosta m, zawierająca punkt A i równoległa do BC, przecina prostą DE w punkcie P i prostą DF w punkcie Q. Wykaż, że trójkąt DPQ jest równoramienny.

94. Udowodnij, że jeżeli liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 9, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

95. Ile różnych dziewięcioliterowych wyrazów (ciągów liter) można ułożyć z liter występujących w wyrazie "rezerwuar" (literę "e" liczymy dwukrotnie, "r" - trzykrotnie)?

96. Udowodnij, że jeżeli dla każdej wartości x zachodzi równość

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)},$$

gdzie $a \neq 0$ jest ustaloną liczbą, to funkcja $f(x)$ jest okresowa.

97. Dany jest okrąg o oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu o.

98. Udowodnij, że nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, który przyjmuje dokładnie w jednym punkcie całkowitym wartość parzystą.