Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa młodsza

czwartek, 27 września 2001

71. Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami n różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

72. Udowodnij, że w danym ciągu n-wyrazowym złożonym z liczb całkowitych istnieje pewna liczba jego kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n.

73. Okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

74. Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków BC, CA i AB trójkąta ABC; proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie. Punkty P_1, Q_1, R_1 są obrazami odpowiednio punktów P, Q, R w symetriach względem środków tych boków trójkąta ABC, do których należą. Wykaż, że proste AP_1, BQ_1, CR_1 przecinają się w jednym punkcie.

75. Wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że nie jest możliwe, by $W(7) = 11$ i jednocześnie $W(11) = 13$.

711. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają następujące warunki: $a+b+c+d = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$, $abcd = 1$. Udowodnij, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa starsza

czwartek, 27 września 2001

73. Okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

75. Wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że nie jest możliwe, by $W(7) = 11$ i jednocześnie $W(11) = 13$.

76. Niech a będzie liczbą całkowitą, p liczbą pierwszą nieparzystą. Udowodnij, że istnieje para liczb całkowitych (x, y) spełniająca warunki: $(x, y) \neq (0, 0)$, $p \mid ax - y$, $|x| \leqslant [\sqrt{p}], |y| \leqslant [\sqrt{p}]$.

77. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą odpowiednio na prostych AC i AB, przy czym proste BE i CF przecinają się na wysokości AD. Wykaż, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF$.

78. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, dla których $abcd = 2001$, zachodzi nierówność:

$$3\left(\frac{a^2b^2c^2}{d} + \frac{a^2b^2d^2}{c} + \frac{a^2c^2d^2}{b} + \frac{b^2c^2d^2}{a}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2b^2d + a^2bd^2 + ab^2d^2 + a^2c^2d + a^2cd^2 + ac^2d^2 + b^2c^2d + b^2cd^2 + bc^2d^2.$$

79. Dany jest zbiór S złożony z n elementów. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą niepustymi podbiorami zbioru S. Wykaż, że istnieją takie dwa różne niepuste podzbiory A i B zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, że

$$\bigcup_{k \in A} M_k = \bigcup_{k \in B} M_k.$$

Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa najstarsza

czwartek, 27 września 2001

77. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą odpowiednio na prostych AC i AB, przy czym proste BE i CF przecinają się na wysokości AD. Wykaż, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF$.

78. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, dla których $abcd = 2001$, zachodzi nierówność:

$$3\left(\frac{a^2b^2c^2}{d} + \frac{a^2b^2d^2}{c} + \frac{a^2c^2d^2}{b} + \frac{b^2c^2d^2}{a}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2b^2d + a^2bd^2 + ab^2d^2 + a^2c^2d + a^2cd^2 + ac^2d^2 + b^2c^2d + b^2cd^2 + bc^2d^2.$$

79. Dany jest zbiór S złożony z n elementów. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą niepustymi podbiorami zbioru S. Wykaż, że istnieją takie dwa różne niepuste podzbiory A i B zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, że

$$\bigcup_{k \in A} M_k = \bigcup_{k \in B} M_k.$$

710. Punkt R jest środkiem łuku AB okręgu opisanego na $\triangle ASB$, który zawiera punkt S. Punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ASB$, Q jest punktem styczności okręgu wpisanego w $\triangle ASB$ z bokiem AB, a P punktem przecięcia prostej DR z okręgiem opisanym na $\triangle ASB$, różnym od R. Wykaż, że $\measuredangle APQ = \measuredangle SAB$.

711. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają następujące warunki: $a+b+c+d = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$, $abcd = 1$. Udowodnij, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

712. Oblicz sumę $x^4 + y^4 + z^4$ wiedząc, że $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią.