Zadania nieco trudniejsze niż inne, do rozwiązywania w wolnych chwilach

1. Na szachownicy $n \times n$ szerzy się epidemia. Na początku zarażone jest k pól - ognisk epidemii. Jeżeli co najmniej dwóch z czterech sąsiadów nie zarażonego pola jest zarażonych, to ono również staje się zarażone. Znaleźć najmniejsze k takie, że zarażona może zostać cała szachownica.

2. Okręgi O_1, O_2, O_3 są styczne odpowiednio do boków AB i AC, BA i BC, CA i CB trójkąta ABC. Okrąg O jest styczny zewnętrznie do O_1, O_2, O_3 odpowiednio w punktach D, E, F. Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Niech A, B, C i D będą czterema różnymi punktami leżącymi w tej kolejności na prostej. Okręgi o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Proste XY i BC przecinają się w punkcie Z. Niech P będzie dowolnym punktem na prostej XY, różnym od Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M, prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY przecinają się w jednym punkcie.

4. Okrąg O jest opisany na trójkącie ABC. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu O, do którego nie należy A. Punkty S_1 oraz S_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w $\triangle PAB$ i $\triangle PAC$. Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P okręgi opisane na trójkątach PS_1S_2 mają punkt wspólny.

5. Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$ znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{{a_i}^2 + (2i-1)^2}.$$

6. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 64\}$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Udowodnić, że istnieją liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego zbioru takie, że $a + b = c$.

7. Dany jest skończony zbiór A punktów w przestrzeni. Każdemu punktowi ze zbioru A przypisana jest liczba rzeczywista. Dla dowolnej płaszczyzny zawierającej przynajmniej trzy punkty z A suma liczb przypisanych punktom znajdującym się na tej płaszczyźnie jest równa 0. Czy, jeżeli zbiór A nie jest zawarty w jednej płaszczyźnie, to liczba przypisana każdemu z punktów równa jest 0?

8. Na sali tanecznej znajduje się n chłopców i n dziewcząt. Każda grupa k chłopców zna co najmniej k dziewcząt. Udowodnić, że jest możliwe, by każdy chłopiec tańczył z dziewczęciem, które zna.

9. Niech $P^k(n)$ oznacza zbiór k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Udowodnić, że dla dowolnego n i dowolnego $n < k \geqslant n/2$ istnieje różnowartościowa funkcja $f : P^{k+1}(n) \mapsto P^k(n)$ taka, że $f(A) \subset A$.

10. Niech $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Udowodnić, że ciąg $a_n - \sqrt{2n}$ zbiega do zera.

11. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n.$$

12. Wielomian $W(x)$ stopnia n spełnia warunek $W(k) = \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Obliczyć $W(0)$.

13. Mamy płaszczyznę z naniesionym układem współrzędnych. Dzielimy ją na kwadraty jednostkowe o współrzędnych wierzchołków całkowitych (tj. robimy z niej szachownicę). Rysujemy koło o promieniu 2000 i środku w środku układu współrzędnych. Do figury S należą te i tylko te kwadraty, które są w całości zawarte w narysowanym kole. Na każdym kwadracie należącym do S piszemy liczbę $+1$. Na S możemy przeprowadzać następujące operacje: wybrać prostą przecinającą oś OX pod kątem $0°, 45°, 90°$ lub $135°$, i zmienić znak liczby wpisanej we wszystkie kwadraty, których środek leży na tej prostej. Stwierdzić, czy istnieje ciąg operacji prowadzący do tego, że na tylko jednym kwadracie S znajduje się liczba -1, zaś na reszcie $+1$.