Zadania do samodzielnego rozwiązywania

piątek, 29 września 2000

61. Niech l_1, l_2 będą prostymi przecinającymi się w punkcie O. Z dowolnego punktu A prowadzimy 4 proste k_1, k_2, k_3, k_4 przecinające proste l_1 i l_2. Dla $i = 1, 2, 3, 4$ oznaczmy przez X_i punkt przecięcia prostej k_i z prostą l_1, a przez Y_i punkt przecięcia prostej k_i z l_2.

Oznaczmy przez:

B_1 punkt przecięcia odcinka X_1Y_2 z X_2Y_1,

B_2 punkt przecięcia odcinka X_2Y_3 z X_3Y_2,

B_3 punkt przecięcia odcinka X_3Y_4 z X_4Y_3.

Pokazać, że punkty B_1, B_2, B_3, O leżą na jednej prostej. Ponadto wykazać, że prosta ta nie zależy od wyboru prostych k_i, a jedynie od położenia punktu A i prostych l_1, l_2.

62. Dane są trzy proste l_1, l_2, l_3 przecinające się w punkcie O. Na prostej l_1 wybieramy punkty A i A', na l_2 - B i B', na l_3 - C i C', wszystkie różne od punktu O.

Niech P będzie punktem przecięcia prostych AB i $A'B'$, Q - BC i $B'C'$, a R - AC i $A'C'$. Pokazać, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.

63. Na okrągłym kawiarnianym stoliku dwóch graczy gra w grę o następujących zasadach: gracze na przemian kładą na stoliku jednozłotówki, przy czym nie mogą one wystawać poza stolik ani nachodzić na siebie oraz nie wolno przesuwać leżących już monet. Przegrywa ten gracz, który jako pierwszy nie może wykonać ruchu. Który z graczy ma strategię wygrywającą i jaką?

64. Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.