Drugie zawody drużynowe

sobota, 30 września 2000

71. Do obrad przy okrągłym stole zasiadła parzysta liczba osób. Po przerwie obiadowej uczestnicy zajęli miejsca przy stole w sposób dowolny. Udowodnić, że istnieją dwie osoby przedzielone tą samą, co przed przerwą, liczbą osób.

72. Na szachownicy 3×3 dwa białe konie szachowe stoją na polach narożnych wzdłuż jednego brzegu, a dwa czarne na polach narożnych wzdłuż przeciwległego brzegu.

a) Pokaż, że można za pomocą skończonej liczby ruchów zamienić miejscami konie białe i czarne, przy czym każdy koń powinien przejść do przeciwległego rogu szachownicy.

b) Czy można wykonać skończoną liczbę ruchów tak, aby na końcu czarne konie biły się nawzajem?

73. Rozważamy ciąg słów zbudowanych z liter A i B. Pierwsze słowo – A, drugie – B, k-te słowo otrzymujemy dopisując po prawej stronie słowa o numerze $(k-2)$ słowo o numerze $(k-1)$. Tak więc otrzymujemy A, B, AB, BAB, $ABBAB$, $\ldots$. Czy wśród słów tego ciągu można znaleźć słowo okresowe, to znaczy słowo, które da się zapisać w postaci $PP\ldots P$, gdzie P powtarza się co najmniej dwukrotnie i jest pewną skończoną kombinacją liter A i B (na przykład $BABBBABB = PP$, dla $P = BABB$)?

74. Z kartki papieru w kratkę o wymiarach 29×29 kratek wycięto 99 kwadratów 2×2. Wykazać, że można wyciąć jeszcze jeden taki kwadrat. Wszystkie cięcia przeprowadzane są wzdłuż linii wyznaczających kratki.

75. Pewien język składa się ze słów długości nie większej niż m zbudowanych z n liter, przy czym żadne słowo nie jest początkiem innego. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1$$

gdzie a_k oznacza liczbę słów długości k.

76. Dane są punkty A i B oraz liczba dodatnia k. Udowodnić, że zbiór punktów X takich, że $\frac{|XA|}{|XB|} = k$ jest okręgiem.

77. Czy istnieje wielościan o nieparzystej liczbie ścian, z których każda jest trójkątem?

78. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykazać, że $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

79. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $ab = cd$. Wykazać, że liczba $a^2000 + b^2000 + c^2000 + d^2000$ jest złożona.

710. Udowodnić, że wielomianu stopnia siódmego i o współczynnikach całkowitych przyjmującego dla siedmiu różnych argumentów wartość 1 lub -1 nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów dodatnich stopni o współczynnikach całkowitych.

711. Obliczyć pole ośmiokąta wpisanego w okrąg wiedząc, że każdy z czterech kolejnych boków tego ośmiokąta ma długość 1, a każdy z czterech pozostałych ma długość 2.

712. Obliczyć pole trapezu, wiedząc, że jego przekątne mają długości 13 i 15, a wysokość 5.

713. Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$ liczba $\sum_{i=1}^{p-1} i^p$ dzieli się przez p.

714. Okrąg O jest opisany na trójkącie ABC. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu O, do którego nie należy A. Punkty S_1 oraz S_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w

$\triangle PAB$ i $\triangle PAC$. Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P okręgi opisane na trójkątach PS_1S_2 mają punkt wspólny.

715. Dany jest zbiór $2n$ ($n > 2$) różnych liczb. Jak podzielić ten zbiór na pary, żeby suma iloczynów liczb poszczególnych par była a) najmniejsza, b) największa?

716. Punkty A, B, C, D leżą na jednej prostej, w tej właśnie kolejności. Przez punkty A i B prowadzimy okrąg o_1, przez punkty C i D prowadzimy okrąg o_2. Okręgi te przecinają się w punktach E i F. Wykazać, że przy ustalonych punktach A, B, C, D dla wszystkich par okręgów o_1 i o_2 proste EF przechodzą przez stały punkt.

717. Dowieść, że płaszczyzny nie można pokolorować trzema kolorami w taki sposób, aby dowolne dwa punkty odległe o 1 były pomalowane różnymi kolorami.

718. Wiedząc, że $a, b \in \mathbb{R},\ a + b = 1,\ a^3, b^3 \in \mathbb{Q}$, udowodnić, że $a, b \in \mathbb{Q}$.

719. Udowodnić, że dla liczb naturalnych n, k zachodzi następująca tożsamość:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

720. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego. Udowodnić, że na to, aby dla każdego rzeczywistego x zachodziła nierówność $W(x) \geqslant 0$, potrzeba i wystarcza, aby istniały takie wielomiany P, Q, że $W(x) = [P(x)]^2 + [Q(x)]^2$.

721. Niech x_n będzie ostatnią cyfrą liczby $[\sqrt{10^n}]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a. Czy $\{x_n\}$ jest ciągiem okresowym od pewnego miejsca?

722. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Dowieść, że

$$\frac{P(\triangle BCP)}{P(\triangle ADP)} = \frac{|CQ|}{|DQ|}.$$

723. Wykazać, że

$$-\pi - 1 \leqslant \sqrt{40\sqrt{2} - 57} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} \leqslant -\pi^2.$$