KółKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 8.04.2010

Podłoga

`Teoria:`

1. *Częścią całkowitą* dowolnej liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę calktowitą niewiększą od x. W Polsce przyjmuje się oznaczać ją przez $[x]$, choć w literaturze spotyka się również zapis $\lfloor x \rfloor$ i nazwę *podłoga* liczby rzeczywistej x.

2. Z powyższym związane jest również pojęcie części ułamkowej x (oznaczanej jako $\{x\}$) oraz sufitu liczby x (najmniejszej liczby całkowitej niemniejszej od x), oznaczanej jako $\lceil x \rceil$.

3. Wybrane własności podłogi:

   (a) $[x] \leqslant x < [x] + 1$ (lub równoważnie: $x \quad\; 1 < [x] \leqslant x$)

   (b) Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to dla dow. $x \in \mathbb{R}$ mamy $[x + n] = [x] + n$

   (c) Jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $[x] + [\quad x] = 0$. W przeciwnym przypadku $[x] + [\quad x] = \quad 1$.

   (d) $[x + \frac{1}{2}]$ jest liczbą całkowitą leżącą najbliżej x

   (e) $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$

   (f) Jeśli $x \in \mathbb{R}^+$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left[\frac{x}{n}\right]$ jest liczbą liczb całkowitych dodatnich podzielnych przez n, nie przekraczających x

`Zadania:` *zadania 10., 11.; 12 na cukierka*

1. Udowodnij, że dla nieujemnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $[x][y] \leqslant [xy]$.

2. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

3. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy $[2x] + [2y] \geqslant [x] + [y] + [x + y]$.

4. Udowodnij, że dla dowonego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n \quad \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right]$.

5. Niech r będzie liczbą rzeczywistą, dla której $\left[r + \frac{19}{100}\right] + \left[r + \frac{20}{100}\right] + \ldots + \left[r + \frac{91}{100}\right] = 546$. Znajdź $[100r]$.

6. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $4x^2 \quad\; 40\,[x] + 51 = 0$.

7. (*Twierdzenie Gaussa*) Niech p i q będę względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Udowodnij, że $\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q \quad 1)p}{q}\right] = \frac{(p \quad 1)(q \quad 1)}{2}$

8. Dziewięć jednakowych batonów kosztuje 11 złotych z groszami, a trzynaście takich batonów kosztuje 15 złotych z groszami. Ile kosztuje jeden baton?

9. Udowodnij, że ciąg liczb naturalnych $a_n = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$ opuszcza wyłącznie liczby trójkątne (te postaci $\frac{m(m+1)}{2}$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$).

10. Udowodnij, że ciąg liczb naturalnych $a_n = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ opuszcza wyłącznie kwadraty liczb naturalnych.

11. (*Twierdzenie Beatty'ego*) Niech x i y są dwiema dodatnimi liczbami niewymiernymi takimi, że $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Wówczas zbiory $\{[x], [2x], \ldots\}$ i $\{[y], [2y], \ldots\}$ są rozłączne, a ich suma stanowi zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich.

12. (*Tożsamość Hermite'a*) Niech $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$. Wówczas $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$