KÓŁKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 15.10.2009

Kąty w okręgach oraz pochodne temu tematy

Teoria:

T1. Zależności między kątami wpisanymi i środkowymi w okręgu.
T2. Czworokąty wpisane w okrąg.
T3. Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą i odwrotne.
T4. Kąty opisane na łukach równej długości.
T5. Własności dwusiecznych kątów wpisanych w okrąg.
T6. Prosta Simsona.
T7. Okrąg Dziewięciu Punktów

Zadania:

Z1: W trójkącie ABC znajduje się punkt P. Na bokach BC, CA, AB obrano punkty K, L, M odpowiednio w taki sposób, że na czworokątach $PMBK$ i $PKCL$ da się opisać okrąg. Udowodnij, że na czworokącie $PLAM$ da się opisać okrąg.

Z2: Dany jest trójkąt ABC. Punkt H jest ABC ortocentrum tego trójkąta. Udowodnij, że obraz H w symetrii względem prostej BC należy do okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Z3: Okrąg o jest dzielony przez n parami różnych średnic na $2n$ równych części. Punkt M leży wewnątrz o. Wykaż, że rzuty punktu M na wspomniane średnice są wierzchołkami n-kąta foremnego.

Z4: Punkty A, B, M, N leżą na jednym okręgu. Cięciwy MA' i MB' są prostopadłe do prostych NA i NB odpowiednio. Udowodnij, że AA' jest równoległy do BB'.

Z5: Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC w taki sposób, że prosta AM jest dwusieczną w tym trójkącie. Punkty B' i C' są rzutami punktu D na proste AB i AC odpowiednio. Punkt M leży na prostej $B'C'$ oraz odcinek DM jest prostopadły do boku BC. Wykaż, że prosta AM zawiera środkową ABC.

Z6: Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykazać, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC, BCD, CDA i DAB są wierzchołkami prostokąta.

Z7: W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny w punktach K, L i M do boków BC, CA i AB odpowiednio. Punkty P, Q, R są środkami okręgów opisanych na trójkątach ALM, BMK i CKL. Udowodnij, że proste KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie.

Z8: Dany jest dowolny trójkąt ABC. Udowodnij, że istnieje wewnątrz niego punkt F taki, że $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = \frac{2}{3}$.

Praca Domowa:

P1: Na płaszczyźnie dane są niewspółliniowe punkty ABC. Rozważamy rodzinę trójkątów równobocznych XYZ takich, że punkty A, B, C leżą na bokach YZ, ZX, XY odpowiednio. Udowodnij, że istnieje punkty będący środkiem każdego z takich okręgów.