Trzecia seria zadań trudniejszych

czwartek, 5 listopada 2009

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC i ortocentrum H. Niech $M(AB)$ będzie środkiem AB. Okrąg o środku w $M(AB)$, przechodzący przez H, przecina AB w punktach $C1$,$C2$. Analogicznie definiujemy punkty $A1$,$A2$,$B1$,$B2$. Pokaż, że $A1, A2, B1, B2, C1, C2$ leżą na jednym okręgu.

2. Wielomiany P, Q, R jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych spełniają tożsamość $P(x)^4 + Q(x)^4 = R(x)^2$. Wielomiany P i Q są względnie pierwsze. Udowodnić, że P, Q i R są stałe.

3. Znajdź wszystkie takie wielomiany postaci $a_n x^n + \ldots + a_0$ dla $|a_j| = 1$, mające n pierwiastków rzeczywistych

4. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Znajdź liczbę p-elementowych podzbiorów A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, takich że suma elementów A jest podzielna przez p