II seria zadan trudniejszych

22.10.2009

1. Na planszy 5x5 dwaj gracze piszą na przemian liczby w pustych polach do momentu zapełnienia planszy. Pierwszy gracz stawia zawsze 1, natomiast drugi zawsze 0. Po zakończeniu gry dla każdego kwadratu 3x3 liczymy sumę liczb na jego polach. Niech A to będzie max z tych sum. Celem pierwszego gracza jest uzyskanie jak największej wartości A. Znaleźć strategię dla pierszego gracza.

2. Niech ciąg funkcji f_1, f_2 ... będzie dla $x > 0$ określony rekurencyjnie w sposób następujący:

$$f_1(x) = x, f_{n+1}(x) = f_n(x)(f_n(x) + \frac{1}{n})$$

   Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna dodatnia liczba a, dla której

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$$

   dla wszystkich całkowitych $n \geqslant 1$.

3. Niech a i b to takie liczby całkowite dodatnie, że $ab + 1$ dzieli $a^2 + b^2$. Pokazać, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Dany jest okrąg o, w którym mamy dwie różne cięciwy AB i CD, przecinające się w E. Niech M będzie punktem z cięciwy AB różnym od E. Okrąg k przechodzi przez punkty D, E i M. Prosta styczna do k w punkcie E przecina BC i AC w punktach F i G. Dany jest stosunek $\frac{AM}{AB} = t$. Znaleźć $\frac{GE}{EF}$.