

## PIĘCIOGODZINÓWKA O PIĄTEJ W NOCY

**1.** Mamy  $n$  skarbonek i  $n$  kluczyków (każdy kluczyk pasuje do dokładnie jednej skarbonki). Do każdej skarbonki wrzucamy jeden kluczyk. Następnie rozbijamy  $k$  spośród nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda nam się bez rozbijania otworzyć pozostałe skarbonki (możemy używać kluczyków z rozbitych skarbonek, tych z otwartych za ich pomocą itd.)?

**2.** W pewnej grupie osób niektóre z nich uczą się języka angielskiego, hiszpańskiego, niemieckiego, suahili, esperanto. Wiadomo, że każdego języka uczy się co najmniej połowa osób. Wykazać, że istnieją dwa języki, oraz grupa licząca co najmniej  $\frac{1}{5}$  osób, że każda z osób z tej grupy uczy się obu tych języków.

**3.** Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg  $o_1$ . Styczna do tego okręgu w punkcie  $C$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $D$ . Okrąg  $o_2$ , styczny do prostej  $AB$  w punkcie  $D$ , przechodzi przez punkt  $C$  i przecina okrąg  $o_1$  w różnych punktach  $C$  i  $E$ . Wykazać, że

$$\frac{EA}{EB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^3$$