Baltic Way

24.03.2009

1. Znajdź wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że liczba $3^n + 1$ jest podzielna przez n^2.

2. Dyrektor wykrył w swoim wydziale 6 spisków. Każdy z nich został zawiązany przez dokładnie 3 osoby. Dowieść, że dyrektor może podzielić wydziału na dwa laboratoria w taki sposób, aby żadna spiskująca grupa nie znalazła się cała w jednym laboratorium.

3. Środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie M. Prosta t przechodząca przez punkt M przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach X i Y, przy czym punkty A i C leżą po tej samej stronie prostej t. Dowieść, że:

$$BX \quad BY = AX \quad AY + CX \quad CY$$

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, że:

$$f(1) = 1$$
$$f(\frac{1}{x+y}) = f(\frac{1}{x}) + F(\frac{1}{y})$$
$$(x+y)f(x+y) = xyf(x)f(y)$$

5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d spełniona jest nierówność:

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geqslant 4$$

6. W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC. Proste BE i CD przecinają się w punkcie F. Wykazać, że jeżeli

$$BC^2 = BD \quad BA + CE \quad CA$$

to punkty A, D, F, E leżą na jednym okręgu.