Trochę grafowo

wtorek, 3 marca 2009

1. Udowodnij, że można pokolorować wierzchołki grafu planarnego, używając trzech kolorów, tak by nie istniał trójkąt o wierzchołkach w tych samych kolorach.

2. Wielomian n-tego stopnia spełnia: $P(1) = 1, P(2) = \frac{1}{2}, P(4) = \frac{1}{4}, \dots, P(2^n) = \frac{1}{2^n}$. Znajdź $P(0)$.

3. Każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ma k elementów ($k \geqslant 1$) oraz każdy element $x \in X$ należy do co najwyżej k ze zbiorów A_i. Udowodnij, że istnieje k systemów różnych reprezentantów, o tej własności, że dla każdego i wszystkie elementy reprezentujące A_i są różne (i wyczerpują cały zbiór A_i).

4. t_i to $i - ty$ wyraz słowa Thue-Morse'a. Niech:
   $I = \{i \in \{1, 2, \dots, 2^N - 1\} : t_i = 0\}$
   $J = \{j \in \{1, 2, \dots, 2^N - 1\} : t_j = 1\}$
   Udowodnij, że dla $0 \leqslant k \leqslant N - 1$ zachodzi: $\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k$.

5. Jako, że wiosna już przyszła, ogrodnik Piotr, zamiast przyjść na kółko, postanowił zasadzić kwiatki w swoim ogrodzie. Ogród Piotra jest nieskończoną płaszczyzną z naniesionym układem współrzędnych. W N punktach kratowych (tzn. tych o obu współrzędnych całkowitych) Piotr postanowił posadzić po jednym kwiatku - róży lub goździku. Ogrodnik będzie uważał, że jego ogród jest piękny tylko wtedy, gdy na każdej prostej równoległej do którejkolwiek osi układu (tzn. poziomej lub pionowej) liczba róż i goździków będzie się różniła co najwyżej o 1. Udowodnij, że może tak zasadzić kwiaty w tych N punktach, by uczynić swój ogród pięknym.

6. Punkty K i L leżą na bokach AB i AC trójkąta ABC tak, że BK=CL. Niech P będzie punktem przecięcia CK i BL. Prosta równoległa do dwusiecznej kąta wewnętrznego BAC trójkąta przecina AC w punkcie M. Pokazać, że CM=AB.